Bevezetés a programozáshoz 2., 2. zárthelyi dolgozat
2008. március 7. (péntek), 10 óra

1. feladat
Adott az x vektor és a vele azonos értelmezési tartományú (lob-ot és hib-et, így dom-ot tekintve is megegyező) y vektor. x elemei természetes számok és nincs köztük két egyforma.

- Fogalmazzuk meg szövegesen, hogy milyen feladatot old meg az alább specifikált feladat! 3 pont
- Írjunk megoldóprogramot és bizonyítsuk be a helyességét levezetéssel! (Használhatjuk a szereplő hely nevű függvényt a programban is bárhol.) 8 pont
- Specifikáljunk egy feladatot és adjunk megoldóprogramot levezetéssel a hely függvény kiszámítására egy adott x vektor egy adott i elemére. 7 pont

$\mathbb{V} = \text{vect}(\mathbb{Z}, \mathbb{N})$
$A = \underset{x}{\mathbb{V}} \times \underset{y}{\mathbb{V}}$
$B = \underset{x'}{\mathbb{V}}$
$Q : (x = x' \wedge y.\text{lob} = x.\text{lob} \wedge y.\text{hib} = x.\text{hib} \wedge \forall i, j \in [x.\text{lob}, x.\text{hib}] : i \neq j \rightarrow x_i \neq x_j)$
$R : (Q \wedge \forall i \in [x.\text{lob}, x.\text{hib}] : y_{\text{hely}(x,i)} = x_i)$, ahol $\text{hely}(x,i) = x.\text{lob} + \sum_{j=x.\text{lob}}^{x.\text{hib}} \chi(x_j < x_i)$

Megoldás:
A feladat az, hogy rendezzük az x vektort növekvő sorrendbe, az eredmény y-ban keletkezzen! 3 pont
$P : (Q \wedge k \in [x.\text{lob}-1, x.\text{hib}] \wedge \forall i \in [x.\text{lob}, k] : y_{\text{hely}(x,i)} = x_i)$ 1 pont

1. $\boxed{Q \Rightarrow P}$
$Q' : (Q \wedge k = x.\text{lob} - 1)$ 1 pont

2. $\boxed{P \wedge \neg\pi \Rightarrow R}$
$\neg\pi = (k = x.\text{hib})$ 1 pont

3. $\boxed{P \wedge \pi \Rightarrow t > 0}$
$t := x.\text{hib} - k$ 1 pont

4./5. $\boxed{P \wedge \pi \wedge t = t_0 \Rightarrow \text{lf}(S_0, P \wedge t < t_0)}$

Q	$k := x.\text{lob} - 1$		
Q'	$k \neq x.\text{hib}$		
		$y_{\text{hely}(x,k+1)}, k := x_{k+1}, k+1$	$P \wedge \pi$
R			

2 pont

$$P \wedge \pi \wedge t = t_0 \overset{?}{\Rightarrow} \text{lf}(y_{\text{hely}(x,k+1)}, k := x_{k+1}, k+1, P \wedge t < t_0)$$

$$\left.\begin{array}{c} Q \wedge k \in [x.\text{lob}-1, x.\text{hib}-1] \wedge \\ \forall i \in [x.\text{lob}, k] : y_{\text{hely}(x,i)} = x_i \wedge \\ x.\text{hib} - k = t_0 \end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{c} Q \wedge k+1 \in [x.\text{lob}-1, x.\text{hib}] \wedge \\ \forall i \in [x.\text{lob}, k\cancel{+1}] : y_{\text{hely}(x,i)} = x_i \wedge \\ \overset{x_{k+1}}{\cancel{y_{\text{hely}(x,k+1)}}} = x_{k+1} \wedge \\ x.\text{hib} - k - 1 < t_0 \end{array}\right.$$

2 pont

A hely függvény:
$A = \underset{x}{\mathbb{V}} \times \underset{i}{\mathbb{Z}} \times \underset{r}{\mathbb{Z}}$
$B = \underset{x'}{\mathbb{V}} \times \underset{i'}{\mathbb{Z}}$ 1 pont
$Q : (x = x' \wedge i = i' \wedge i \in [x.\text{lob}, x.\text{hib}])$
$R : (Q \wedge r = \text{hely}(x,i) = x.\text{lob} + \sum_{j=x.\text{lob}}^{x.\text{hib}} \chi(x_j < x_i))$
$P : (Q \wedge j \in [x.\text{lob}-1, x.\text{hib}] \wedge r = x.\text{lob} + \sum_{j=x.\text{lob}}^{j} \chi(x_j < x_i))$ 1 pont

1. $\boxed{Q \Rightarrow P}$

$Q' : (Q \wedge j = x.\text{lob} - 1 \wedge r = x.\text{lob})$ 1 pont

2. $\boxed{P \wedge \neg\pi \Rightarrow R}$
$\neg\pi = (j \neq x.\text{hib})$ 1 pont

3. $\boxed{P \wedge \pi \Rightarrow t > 0}$

$t := x.\text{hib} - j$ 1 pont

4./5. $\boxed{P \wedge \pi \wedge t = t_0 \Rightarrow \text{lf}(S_0, P \wedge t < t_0)}$

Az elágazás levezetési szabályával levezethető. 1 pont

<table>
<tr><td colspan="3" align="center">$j, r := x.\text{lob} - 1, x.\text{lob}$</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">$j \neq x.\text{hib}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td colspan="2" align="center">$x_{j+1} < x_i$</td></tr>
<tr><td>$r, j := r + 1, j + 1$</td><td>$j := j + 1$</td></tr>
</table>

1 pont

2. feladat 12 pont

Adott az x vektor, amely természetes számokat és nullákat tartalmaz, azonban biztosan természetes számmal kezdődik. Írjuk minden 0 elem helyére az előtte szereplő természetes számot!
Pl. a $< 2, 0, 0, 3, 4, 0, 5, 4 >$ vektort helyben a $< 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 4 >$ vektorrá alakítsuk!
Specifikáljuk a feladatot és adjunk megoldóprogramot a levezetés módszerével!

Segítség: $\forall i \in [x.\text{lob}, x.\text{hib}] : f(x, i) := \begin{cases} x_i & \text{, ha } x_i \neq 0 \\ f(x, i-1) & \text{, ha } x_i = 0 \end{cases}$

Megoldás:

$\mathbb{V} = \text{vect}(\mathbb{Z}, \mathbb{N}_0), I_{\mathbb{V}}(v) = (v.\text{lov} \neq 0)$

$A = \underset{x}{\mathbb{V}}$

$B = \underset{x'}{\mathbb{V}}$ 4 pont

$Q : (x = x')$

$R : (\forall i \in [x.\text{lob}, x.\text{hib}] : x_i = f(x', i))$

$P : (j \in [x.\text{lob}, x.\text{hib}] \wedge \forall i \in [x.\text{lob}, j] : x_i = f(x', i) \wedge \forall i \in [j+1, x.\text{hib}] : x_i = x'_i)$ 2 pont

Az invariáns azt írja le, hogy egy bizonyos pontig (j) az f szerint vannak már kiszámolva a vektorban az elemek, utána viszont még változatlan a vektor.

1. $\boxed{Q \Rightarrow P}$ Felhasználva a vektor invariánsát is:

$Q' : (Q \wedge j = x.\text{lob}) \Rightarrow P$ 1 pont

2. $\boxed{P \wedge \neg\pi \Rightarrow R}$

$\neg\pi = (j \neq x.\text{hib})$ 1 pont

3. $\boxed{P \wedge \pi \Rightarrow t > 0}$

$t := x.\text{hib} - j$ 1 pont

4. $\boxed{P \wedge \pi \Rightarrow \text{lf}(S_0, P)}$ 2 pont

Elágazás aszerint, hogy x_{j+1} nulla-e. A levezetési szabály első pontja triviálisan teljesül.
A második pont első fele:

$$P \wedge \pi \wedge t = t_0 \wedge x_{j+1} = 0 \overset{?}{\Rightarrow} \text{lf}(j, x_{j+1} := j+1, x_j, P \wedge t < t_0)$$

$$\left.\begin{array}{c} j \in [x.\text{lob}, x.\text{hib} - 1] \wedge \\ \forall i \in [x.\text{lob}, j] : x_i = f(x', i) \wedge \\ \forall i \in [j+1, x.\text{hib}] : x_i = x'_i) \wedge \\ x_{j+1} = 0 \wedge x.\text{hib} - j = t_0 \end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{c} j+1 \in [x.\text{lob}, x.\text{hib}] \wedge \\ \forall i \in [x.\text{lob}, \cancel{j+1}] : x_i = f(x', i) \wedge \\ \cancelto{x_j}{x_{j+1}} = \underbrace{f(x', j+1)}_{f(x', j) = x_j} \wedge \\ \forall i \in [j+2, x.\text{hib}] : x_i = x'_i \wedge \\ x.\text{hib} - j - 1 < t_0 \end{array}\right.$$

A másik ág a $j := j + 1$ értékadással bizonyítható.

<table>
<tr><td colspan="3" align="center">$j := x.\text{lob}$</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">$j \neq x.\text{hib}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td colspan="2" align="center">$x_{j+1} = 0$</td></tr>
<tr><td>$j, x_{j+1} := j + 1, x_j$</td><td>$j := j + 1$</td></tr>
</table>

1 pont

Megjegyzés:
Vegyük észre, hogy ezt a második programot felhasználva az első program eredménye korrigálható abban az esetben, ha a rendezendő vektor tartalmazott azonos elemeket. Ugyanis ekkor az eredményvektorban az azonos értékeket tartalmazandó rész első eleme lesz az érték, a többihez az első program nem nyúl. Így, ha azok mindegyike kezdetben nulla (vagy valami más kinevezett, de egyébként nem szereplő érték), akkor a második feladat megoldását lefuttatva az y (fél)eredmény vektoron immáron helyesen rendezett vektort kapunk.