„Computer Science is no more about computers than astronomy is about telescopes."
— Edsger Dijkstra

Bevezetés a programozáshoz 1., 1. zárthelyi dolgozat
2007. október 24.

Az alábbi feladatok megoldása során állításaidat indokold! Az indoklások triviális tényekre, a tanult definíciókra és a kimondott tételekre hivatkozhatnak. Az előadáson vagy gyakorlaton szerepelt bármely állítás felhasználható, azonban az el nem hangzottakat szintén indokolni kell!

1. Feladat
Legyen $F, G \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ úgy, hogy:
$F = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid b|a \wedge b \neq 1 \wedge b \neq a\}$,
$G = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 2|a \wedge a = 2b\}$.

Írd fel a következő halmazokat:

- $G \circ F$ (2 pont)
- $G \odot F$ (2 pont)
- $F^{(-1)} \circ G^{(-1)}$ (3 pont)
- $F^{-1}(G^{-1}(\{1,2\}))$ (2 pont)
- $(G \circ F)^{(-1)}$ (3 pont)

Megoldás: az F reláció az összes valódi osztót rendeli egy a-hoz, a G pedig a kettővel osztható számokhoz a felüket.

- $G \circ F = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists c \in \mathbb{N} : c|a \wedge c \neq 1 \wedge c \neq a \wedge c = 2b\} = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 2b|a \wedge 2b \neq a\}$
  Tehát minden a számhoz azon b-ket rendeli a $G \circ F$, amik kétszerese valódi osztói a-nak.
- Tudjuk, hogy $G \odot F$ a $G \circ F$-nél értelmezési tartományában szűkebb. G csak a páros számokhoz tartalmaz hozzárendelést, azaz $G \odot F$ csak az olyan összetett a-kra van értelmezve, amely a-k minden valódi osztója páros. Ezek az összetett kettőhatványok, azaz a 4 vagy annál nagyobbak. Minden olyan kettőhatványt hozzárendel ezekhez a számokhoz, amelyek kétszerese még valódi osztó, azaz olyan b-ket, amik önmaguk is kettőhatványok, de legfeljebb a negyedei.
  $\mathcal{D}_{G \odot F} = \{a \in \mathbb{N} \mid \exists k > 1 : a = 2^k\}$
  $\forall a \in \mathcal{D}_{G \odot F} : G \odot F(a) = \{b \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}_0 : b = 2^k \wedge 2b < a\}$
- $(G \circ F)^{(-1)} = F^{(-1)} \circ G^{(-1)}$ tetszőleges relációkra, így most is, úgyhogy ld. utolsó feladat.
- $F^{-1}(G^{-1}(\{1,2\}))$
  $G^{-1}(\{1,2\}) = \{2,4\}, F^{-1}(\{2,4\}) = \{4,8\} = F^{-1}(G^{-1}(\{1,2\}))$
- $(G \circ F)^{(-1)}$, az első feladat eredményének inverze csupán:
  $(G \circ F)^{(-1)} = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 2a|b \wedge 2a \neq b\}$

2. Feladat
Legyen $Q,R,S \subseteq A\times A$. Igaz-e, hogy

- $R\subseteq S \Rightarrow R\odot Q \subseteq S\odot Q$, (7 pont)
- $R\subseteq S \Rightarrow Q\odot R \subseteq Q\odot S$? (3 pont)

Megoldás: az első állítás igaz, míg a második hamis, ugyanis ha az először alkalmazott relációt bővítjük, azzal új „zsákutcákat" hozhatunk létre, amit a szigorú kompozíció kiszűr és így összességében szűkebb relációt kapunk, mintha szűkebb lett volna az először alkalmazott reláció.

Tehát:

- Igaz, ugyanis $(a,b)\in R\odot Q \Rightarrow \exists c:(a,c)\in Q\wedge(c,b)\in R\wedge Q(a)\subseteq \mathcal{D}_R \overset{R\subseteq S}{\Rightarrow} \underbrace{\exists c:(a,c)\in Q\wedge(c,b)\in S\wedge Q(a)\subseteq \mathcal{D}_S}_{(a,c)\in S\odot Q}$
- Hamis, ugyanis $Q:=\{(1,1)\},R:=\{(1,1)\}\subseteq S:=\{(1,1),(1,2)\}\Rightarrow Q\odot R=\{(1,1)\}\not\subseteq\emptyset = Q\odot S$

3. Feladat (8 pont)
Adjunk példát olyan nem üres relációra, amelynek lezártja üres halmaz, és van olyan π feltétel, hogy a reláció feltételre vonatkozó lezártjának értelmezési tartománya megegyezik az eredeti reláció értelmezési tartományával!

Megoldás:

$A:=\{1\},A\times A\supseteq R:=\{(1,1)\},\pi:=\text{HAMIS}$, azaz $\pi(1)=$ hamis.

Ekkor az $\overline{R}=\emptyset$, ugyanis az egyetlen A-beli pontból elindulva a reláció végtelen sokszor „végrehajtható".

Ugyanakkor $R|\pi=\emptyset$, hiszen π a konstans hamis és így $\overline{R|\pi}=\{(1,1)\}$, mivel tudjuk, hogy egy reláció által nem értelmezett pontok mindig benne vannak önmagukkal a reláció lezártjában és így $\mathcal{D}_{\overline{R|\pi}}=\{1\}=\mathcal{D}_R$, tehát a példa helyes.

4. Feladat (10 pont)
$F\subseteq A\times A$ feladat. S_1,S_2 programok A-n. Az S_1 és az S_2 is megoldja az F feladatot.
Igaz-e, hogy az $S=(S_1\cup S_2)$ program is megoldja az F feladatot?

Megoldás: igaz, a megoldás két feltételét kell bebizonyítanunk:

- $\mathcal{D}_F\subseteq\mathcal{D}_{p(S_1\cup S_2)}$:

  (i) A programfüggvény értelmezési tartományának definíciója miatt $\mathcal{D}_{p(S_1\cup S_2)}=\mathcal{D}_{p(S_1)}\cap\mathcal{D}_{p(S_2)}$. Nyilván, a programok uniójának (egybeírásának) hatásrelációja csak ott lesz értelmezve, ahol mindkét program mentes volt a végtelen sorozatoktól, tehát a kettejük értelmezési tartományának metszetén.

  (ii) Mivel S_1 és S_2 megoldják F-et, ezért $\mathcal{D}_F\subseteq\mathcal{D}_{p(S_1)}$ és $\mathcal{D}_F\subseteq\mathcal{D}_{p(S_2)}$.

  Tehát $\mathcal{D}_F\overset{(ii)}{\subseteq}\mathcal{D}_{p(S_1}\cap\mathcal{D}_{p(S_2)}\overset{(i)}{=}\mathcal{D}_{p(S_1\cup S_2)}$.

- $\forall a\in\mathcal{D}_F: p(S_1\cup S_2)(a)\subseteq F(a)$:

  (i) A definícióból következik, hogy azokban a b pontokban, ahol mindkét programfüggvény értelmezett (és mivel mindkét program megoldja a feladatot, minden most tekintett a ilyen): $p(S_1\cup S_2)(b)=p(S_1)(b)\cup p(S_2)(b)$.

  (ii) Azt is tudjuk, a megoldás definíciójából, hogy $p(S_1)(a)\subseteq F(a)$ és $p(S_2)(a)\subseteq F(a)$.

  Készen vagyunk, hiszen így: $\forall a\in\mathcal{D}_F: p(S_1\cup S_2)(a)\overset{(i)}{=}p(S_1)(a)\cup p(S_2)(a)\overset{(ii)}{\subseteq}F(a)$.

5. Feladat (8 pont)
Igaz-e, hogy ha $\text{lf}(S_1,R)=\text{lf}(S_2,R)$, akkor $\text{lf}(S_1\cup S_2,R)=\text{lf}(S_1,R)\vee\text{lf}(S_2,R)$?

Megoldás: igaz, ui.
$\lceil\text{lf}(S_1\cup S_2,R)\rceil=\{a\in\mathcal{D}_{p(S_1\cup S_2)}\mid p(S_1\cup S_2)(a)\subseteq\lceil R\rceil\}\overset{\text{ld. előző feladat}}{=}\{a\in\mathcal{D}_{p(S_1)}\cap\mathcal{D}_{p(S_2)}\mid(p(S_1)(a)\cup p(S_2)(a))\subseteq\lceil R\rceil\}=$
$=\{a\in\mathcal{D}_{p(S_1)}\mid p(S_1)(a)\subseteq\lceil R\rceil\}\cap\{a\in\mathcal{D}_{p(S_2)}\mid p(S_2)(a)\subseteq\lceil R\rceil\}=\lceil\text{lf}(S_1,R)\wedge\text{lf}(S_2,R)\rceil\overset{\text{A két lf egyenlő.}}{=}\lceil\text{lf}(S_1,R)\vee\text{lf}(S_2,R)\rceil$

6. Feladat
Keressük meg egy természetes szám legnagyobb prímosztóját. Specifikáld a feladatot! (8 pont)

Megoldás:

$A = \underset{n}{\mathbb{N}} \times \underset{o}{\mathbb{N}}$
$B = \underset{n'}{\mathbb{N}}$
$Q : (n = n')$
$R : (Q \wedge o|n \wedge o \text{ prím} \wedge \forall p \in \mathbb{N} : (p \text{ prím} \wedge p|n) \rightarrow p \leq o)$

7. Feladat
Keressük meg egy természetes szám egy osztóját. Specifikáld a feladatot! (4 pont)

Megoldás:

$A = \underset{n}{\mathbb{N}} \times \underset{o}{\mathbb{N}}$
$B = \underset{n'}{\mathbb{N}}$
$Q : (n = n')$
$R : (Q \wedge o|n)$