„Simplicity is prerequisite for reliability.”
— Edsger Dijkstra

Bevezetés a programozáshoz 1., 3. zárthelyi dolgozat
2006. december 12.

Az alábbi feladatok megoldása során állításaidat indokold! Az indoklások triviális tényekre, a tanult definíciókra és a kimondott tételekre hivatkozhatnak. Az előadáson vagy gyakorlaton szerepelt bármely állítás felhasználható, azonban az el nem hangzottakat szintén indokolni kell!

1. Feladat
Írjuk fel az $A\times B, A\times C, (C\times B)\times A$ és $B\times C\times A$ halmazok elemeit, ha $A=\{\alpha,\varphi\}, B=\{1,2,3\}, C=\{x,y\}$. (5 pont)

Megoldás:
$A\times B=\{(\alpha,1),(\alpha,2),(\alpha,3),(\varphi,1),(\varphi,2),(\varphi,3)\}$,
$A\times C=\{(\alpha,x),(\alpha,y),(\varphi,x),(\varphi,y)\}$,
$(C\times B)\times A=\{((x,1),\alpha),((x,2),\alpha),((x,3),\alpha),((y,1),\alpha),((y,2),\alpha),((y,3),\alpha),((x,1),\varphi),((x,2),\varphi),((x,3),\varphi),((y,1),\varphi),((y,2),\varphi),((y,3),\varphi)\}$,
$B\times C\times A=\{(1,x,\alpha),(2,x,\alpha),(3,x,\alpha),(1,y,\alpha),(2,y,\alpha),(3,y,\alpha),(1,x,\varphi),(2,x,\varphi),(3,x,\varphi),(1,y,\varphi),(2,y,\varphi),(3,y,\varphi)\}$.

2. Feladat
$R\subseteq A\times A$. Igaz-e, hogy $(R^{(-1)})^2=(R^2)^{(-1)}$? (7 pont)

Megoldás:
Igaz, ui.: $(a,c)\in(R^{(-1)})^2 \Leftrightarrow \exists b\in A:(a,b)\in R^{(-1)}\ni(b,c)\Leftrightarrow(b,a)\in R\ni(c,b)\Leftrightarrow(c,a)\in R^2\Leftrightarrow(a,c)\in(R^2)^{(-1)}$.

3. Feladat
$R\subseteq\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0$.

$$R(a)=\begin{cases}\{a-3\}, & \text{ha } a>2\\ \{3*k|k\in\mathbb{N}\}, & \text{ha } a=1\end{cases}$$

Mi az R reláció lezártja és korlátos lezártja? (10 pont)

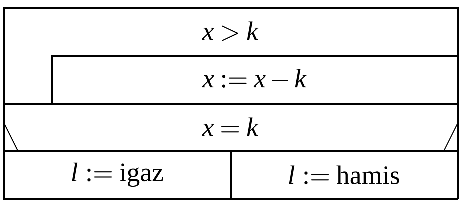
Megoldás:
$\{0,2\}\subset\mathcal{D}_{\bar{R}}$, hiszen ebben a két pontban nincs értelmezve R. Látható, hogy minden olyan pozitív számból, ami nem ad 1 maradékot hárommal osztva a reláció (a számnál nem több lépés alatt) ebbe a részhalmazba jut, tehát ezek a számok is elemei $\mathcal{D}_{\bar{R}}$-nek. Gondolkodni az egy maradékot adó elemmekkel kapcsolatban kell. Ezek az 1-re vezetnek, amihez a reláció tetszőleges nagy, de hárommal osztva 0 maradékot adó számokat rendel. Tehát a korlátos lezárt definiciója által követelt felső korlát ilyenkor nem adható, de biztos, hogy véges bármilyen sorozat, ami az 1-et tartalmazza és „végigköveti” a relációt. Ezért:
$\mathbb{N}_0=\mathcal{D}_{\bar{R}}\subset\mathcal{D}_{\bar{\bar{R}}}=\mathbb{N}_0\setminus\{x\in\mathbb{N}|x \text{ 3-mal osztva 1 maradékot ad}\}$.
$\forall a\in\mathcal{D}_{\bar{\bar{R}}}:\bar{\bar{R}}(a)=\bar{R}(a)$.

$$\forall a\in\mathbb{N}_0:\bar{R}(a)=\begin{cases}0, & \text{ha } a \text{ 3-mal osztva 0 maradékot ad}\\ 2, & \text{ha } a \text{ 3-mal osztva 2 maradékot ad}\\ 0, & \text{ha } a \text{ 3-mal osztva 1 maradékot ad}\end{cases}.$$

4. Feladat
$A=\underset{x}{\mathbb{N}}\times\underset{k}{\mathbb{N}}\times\underset{l}{\mathbb{L}}$
$S=((DO(x>k,x:=x-k);IF(x=k:l:=\text{igaz},x\neq k:l:=\text{hamis}))$

- Rajzold fel a program stuktogramját! (5 pont)

  Megoldás:



- Milyen pontokat rendel a program a $(5,3,\text{igaz})$ és $(6,2,\text{hamis})$ pontokhoz? (10 pont)

  Megoldás:
  $S(5,3,\text{igaz}) = \{<(5,3,\text{igaz}),(2,3,\text{igaz}),(2,3,\text{hamis})>\}$,
  $S(6,2,\text{hamis}) = \{<(6,2,\text{hamis}),(4,2,\text{hamis}),(2,2,\text{hamis}),(2,2,\text{igaz})>\}$.

5. Feladat
Igaz-e, ha $S \subseteq B \times B^{**}$, A altere B-nek, akkor

- $\mathcal{D}_{\text{pr}_A(p(S))} = \text{pr}_A(\mathcal{D}_{p(S)})$? (8 pont)

  Megoldás:
  Ez tetszőleges $R \in B \times B$ relációra igaz, nem csak $p(S)$-re, ui.:
  $a \in \mathcal{D}_{\text{pr}_A(R)} \Leftrightarrow \exists a' \in A : (a,a') \in \text{pr}_A(R) \Leftrightarrow \exists a' \in A : \exists b,b' \in B : (b,b') \in R \wedge \text{pr}(b) = a \wedge \text{pr}(b') = a' \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow \exists b \in B : \text{pr}(b) = a \wedge b \in \mathcal{D}_R \Leftrightarrow a \in \mathcal{D}_{\text{pr}(R)}$.

- S A-ra történő projekciójának programként való kiterjesztése B-re azonos S-sel? (8 pont)

  Megoldás:
  Nem igaz, ellenpélda:
  $A = \{1,2\}$
  $B = \{1,2\} \times \{1,2\}$
  S legyen olyan program, amire: $S \ni ((1,1),<(1,1),(2,2)>)$, ekkor $pr_A(S) \ni (1,<1,2>)$ és emiatt biztosan $pr_A(S)' \ni ((1,1),<(1,1),(2,1))$, ami nem szükséges, hogy benne legyen S-ben, ahhoz, hogy S program legyen.

6. Feladat
$A = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}. S \subseteq A \times A^{**}$. S az $(1,1,2)$ pontból kiindulva előállítja a 10. Fibonacci számot az $u(n) = u(n-1) + u(n-2)$ rekurzív összefüggés alapján. A koordináták rendre $u(n-2)$-nek, $u(n-1)$-nek és $u(n)$-nek felelnek meg. Írd fel azt a sorozatot, amelyet S az $(1,1,2)$ ponthoz rendel! Mit rendel $p(S)$ az $(1,1,2)$ ponthoz? (7 pont)

$S(1,1,2) = \{<(1,1,2),(1,2,3),(2,3,5),(3,5,8),(5,8,13),(8,13,21),(13,21,34),(21,34,55)>\}$, tehát
$p(S)(1,1,2) = \{(21,34,55)\}$.