Bevezetés a programozáshoz 1., 1. zárthelyi dolgozat (megoldás)
2005. október 28.

Az alábbi feladatok megoldása során állításaidat indokold! Az indoklások triviális tényekre, a tanult definíciókra és a kimondott tételekre hivatkozhatnak. Az előadáson vagy gyakorlaton szerepelt bármely állítás felhasználható, azonban az el nem hangzottakat szintén indokolni kell!

1. Feladat
Írjuk fel az $A \times B, A \times C, (C \times B) \times A$ és $B \times C \times A$ halmazok elemeit, ha $A = \{\alpha, \varphi\}, B = \{1,2,3\}, C = \{x,y\}$. (5 pont)

Megoldás:
$A \times B = \{(\alpha,1),(\alpha,2),(\alpha,3),(\varphi,1),(\varphi,2),(\varphi,3)\}$
$A \times C = \{(\alpha,x),(\alpha,y),(\varphi,x),(\varphi,y)\}$
$(C \times B) \times A = \{((x,1),\alpha),((x,1),\varphi),((x,2),\alpha),((x,2),\varphi),((x,3),\alpha),((x,3),\varphi),((y,1),\alpha),((y,1),\varphi),((y,2),\alpha),((y,2),\varphi),((y,3),\alpha),((y,3),\varphi)\}$
$B \times C \times A = \{(1,x,\alpha),(2,x,\alpha),(3,x,\alpha),(1,y,\alpha),(2,y,\alpha),(3,y,\alpha),(1,x,\varphi),(2,x,\varphi),(3,x,\varphi),(1,y,\varphi),(2,y,\varphi),(3,y,\varphi)\}$

2. Feladat
$R \subseteq A \times A$. Igaz-e, hogy $\forall H \subseteq A : R^{-1}(R^{-1}(H)) = (R^2)^{-1}(H)$? (10 pont)

Megoldás: Az állítás hamis, ellenpélda: $A = \{1,2,3,4\}, R = \{(1,2),(1,4),(2,3)\}$
$R^2 = \{(1,3)\}, (R^2)^{-1}(\{3\}) = \{1\}$.
$R^{-1}(\{3\}) = \{2\}, R^{-1}(R^{-1}(\{3\})) = \emptyset$.

Érdekesség: az egyik irányú tartalmazás igaz...

$\subseteq$:

$a \in R^{-1}(R^{-1}(H)) \Rightarrow a \in D_R \wedge R(a) \subseteq R^{-1}(H) \Rightarrow a \in D_R \wedge \forall b \in R(a) : b \in D_R \wedge R(R(a)) \subseteq H \Rightarrow a \in D_{R^2} \wedge R^2(a) \subseteq H \Rightarrow a \in (R^2)^{-1}(H)$

3. Feladat
$R \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

$$R(a) = \begin{cases} \{a-3\}, & \text{ha } a > 2 \\ \{3 * k | k \in \mathbb{N}\}, & \text{ha } a = 1 \end{cases}$$

Mi az R reláció lezártja és korlátos lezártja? (10 pont)

Megoldás: Először adjuk meg a lezárt értelmezési tartományát!

Azok az N_0-beliek, amik nincsenek benne a reláció értelmezési tartományában (a 0 és a 2), biztos benne vannak a lezárt értelmezési tartományában is. A hárommal osztva 0 vagy 2 maradékot adó számok is benne vannak, hiszen előbb-utóbb a szükséges végetelen sorozatnak olyan eleme kellene hogy legyen, ami $R(0)$-nak vagy $R(2)$-nek eleme, de ilyen nem létezik. Az egy maradékot adó számok viszont nulla maradékot adóra „vezetnek”, hiszen minden $3 * k$ szám osztható hárommal. Továbbá minden a lezárt által értelmezett pontban a lezárt értéke a $\{0,2\}$ halmaz részhalmaza, hiszen ezek az R által nem értelmezett számok.

$$\mathcal{D}_{\bar{R}} = N_0 \wedge \forall a \in N_0 \setminus \{x | (x \mod 3) = 2\} : \bar{R}(a) = \{0\} \wedge \forall x \in N_0 : (x \mod 3) = 2 : \bar{R}(x) = \{2\}.$$

A korlátos lezárt értelmezési tartományából az egy maradékot adó számok kiesnek, mivel nem lehet előre megmondani egy olyan lépésszám korlátot ami mellett hármasával csökkentve egy $3 * k$ alakó értékét eljutunk a nullához azon korláton belül. (Hiszen vannak tetszőlegesen nagy k értékek is.)

$$\mathcal{D}_{\bar{\bar{R}}} = N_0 \setminus \{x \in N | (x \mod 3) = 1\} \wedge \forall x \in D_{\bar{\bar{R}}} : \bar{\bar{R}}(x) = \bar{R}(x).$$

4. Feladat
Számítsuk ki egy szám természetes kitevőjű hatványát!
$A = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}, F \subseteq A \times A. F = \{((x,n,k),(y,z,x^n)) | k = 1\}$.
$S_1, S_2 \subseteq A \times A^{**}$

$$\begin{aligned} S_1((x,n,h)) &= \{< (x,n,h),(x,n-1,h*x),...,(x,0,h*x^n) >\} \\ S_2((x,n,h)) &= \{< (a_1),...,(a_m) > | (a_1) = (x,n,h) \wedge \text{Legendre}(a_m) = \emptyset \wedge \\ &\quad \forall i \in [2,m] : (\text{Legendre}(a_{i-1}) \neq \emptyset \wedge (a_i) \in \text{Legendre}(a_{i-1}))\} \end{aligned}$$

ahol Legendre $\subseteq A \times A$

$$\text{Legendre}(x,n,h) = \begin{cases} (x^2, n/2, h), & \text{ha } 2|n \wedge n \neq 0 \\ (x, n-1, x*h), & \text{ha } \neg(2|n) \wedge n \neq 0 \end{cases}$$

- S_1 és S_2 programok? (5 pont)
- Írjuk fel S_1 és S_2 lefutását is a $3^5(243)$ kiszámításakor! (4 pont)
- Milyen pontokat rendel a feladat a $(3,5,1)$ hármashoz? (3 pont)
- Megoldja-e S_1 illetve S_2 az F feladatot? (10 pont)
- Ekvivalensek-e a programok az állapottéren vagy valamely alterén? (3 pont)

Megoldás:

- S_1 program, mivel mindenhol értelmezett, redukált és az általa pontokhoz rendelt sorozatok első elemei a pontok. S_2-ről a mindenhol értelmezettség és a redukáltság nem látszik elsőre, ezeket ellenőrízzük:
  - S_2 mindenhol értelmezett, ha a definíciója értelmes és nem ütköznek a kikötések. Ha a_m-et úgy választjuk, hogy a második eleme 0 legyen, akkor ez teljesül.
  - A redukáltság a rendezett hármasok második elemének folyamatos csökkenése miatt teljesül.
- $S_1(3,5,1) = \{< (3,5,1),(3,4,3),(3,3,9),(3,2,27),(3,1,81),(3,0,243) >\}$
  $S_2(3,5,1) = \{< (3,5,1),(3,4,3),(9,2,3),(81,1,3),(81,0,243) >\}$
- A feladat a $(3,5,1)$ hármashoz bármilyen olyan rendezett hármast hozzárendel, aminek utolsó tagja a 243.
- S_1 triviálisan megoldja a feladatot. S_2 a futása végére azért jut mindig a harmadik komponenesben pont a hatvány értékére, mert az általa bejárt sorozat minden (x,n,h) pontjában igaz, hogy a sorozat hátra lévő része azt éri el, hogy a harmadik komponensben megjelenjen a $x^n * h$ érték. Ha n páratlan, akkor ezzel a célkitűzéssel ekvivalens $x^{n-1} * (h * x)$ kiszámításának célkitűzése, ha páros, akkor azonban $x^{2^{n/2}} * h$ is azonos érték. A legendre függvény ezt írja le formalizálva. Amikor a kitevőben, azaz az n komponensben megjelenik a 0, akkor a h-ban így pont az $x^n * h$ érték (az eredeti x, h és n vonatkozásában) kell, hogy szerepeljen, de tudjuk, hogy a feladat csak $h = 1$ értékkel kezdődő futtatásra követel meg helyes eredményt.
- A 3^5 példából is látszik, hogy a programok az állapottéren biztos nem, esetleg annak egy alterén lehetnek ekvivalensek. Ez az altér az n és h komponens által kifeszített altér, mivel a programok lefutása végén n mindig a 0, míg h a hatvány értéke az eredeti h-val felszorozva.

5. Feladat
Egy program programfüggvénye $p(S) = \{(2,1),(2,4),(4,5),(4,1),(4,2),(5,4)\}$. $\lceil R \rceil = \{1,2,4\}$. Írd fel az $\lceil \text{lf}(S,R) \rceil$ halmazt! (5 pont)

Megoldás: definíció szerint: $\lceil \text{lf}(S,R) \rceil = \{2,5\}$

6. Feladat
Állapítsuk meg, hogy mennyi valódi osztója van egy természetes számnak. Specifikáld a feladatot! (Felhasználható a $\chi : \mathbb{L} \to \{0,1\}$ függvény, ami az igaz helyeken 1.) (5 pont)

Megoldás:
$A = \underset{x}{N} \times \underset{d}{N_0}$
$B = \underset{x'}{N}$
$Q = (x = x')$
$R = (Q \wedge d = \sum_{i=2}^{x-1} \chi(i|x))$