Bevezetés a programozáshoz 1., 1. zárthelyi dolgozat (megoldás)
2005. október 26.

Az alábbi feladatok megoldása során állításaidat indokold! Az indoklások triviális tényekre, a tanult definíciókra és a kimondott tételekre hivatkozhatnak. Az előadáson vagy gyakorlaton szerepelt bármely állítás felhasználható, azonban az el nem hangzottakat szintén indokolni kell!

1. Feladat
Bizonyítsuk be, hogy $H \subseteq A \times B$ esetén

- $(\forall (a,b),(c,d) \in H : (a,d) \in H) \Leftrightarrow (\exists K \subseteq A : \exists L \subseteq B : H = K \times L)$, (12 pont)
- ha H nem üres, akkor K és L egyértelmű. (5 pont)

Megoldás: Ha H üres, akkor $K = \emptyset$ választással az L tetszőleges részhalmaza lehet B-nek.

Ha H nem üres, akkor:

$\Rightarrow$:
$K ::= \mathcal{D}_H, L ::= \mathcal{R}_H$, tehát $H \stackrel{?}{=} \mathcal{D}_H \times \mathcal{R}_H$.
$H \subseteq \mathcal{D}_H \times \mathcal{R}_H$: $(a,b) \in H \Rightarrow (a,b) \in \mathcal{D}_H \times \mathcal{R}_H$, hiszen $a \in \mathcal{D}_H$ és $b \in \mathcal{R}_H$.
$H \supseteq \mathcal{D}_H \times \mathcal{R}_H$: $(a,d) \in \mathcal{D}_H \times \mathcal{R}_H \Rightarrow \exists b \in B : \exists c \in A : (a,b) \in H \wedge (c,d) \in H \Rightarrow (a,d) \in H$.

$\Leftarrow$:
$(a,b) \in H \Rightarrow a \in K, (c,d) \in H \Rightarrow d \in L$, és így, mivel $H = K \times L$, $(a,d) \in H$.

Egyértelműség: tegyük fel, hogy $K \times L \neq \mathcal{D}_H \times \mathcal{R}_H$. Ez két módon teljesülhet:

- $K \neq \mathcal{D}_H$
  - $K \subset \mathcal{D}_H$, azaz $\exists a \in D_H : a \notin K$, ami ellentmond $H = K \times L$-nek.
  - $K \supset \mathcal{D}_H$, azaz $\exists a \in K : a \notin D_H$, ami ellentmond $H = K \times L$-nek.
- $L \neq \mathcal{R}_H$: hasonlóan.

2. Feladat
$R \subseteq A \times A$. Igaz-e, hogy $(R^{(-1)})^2 = (R^2)^{(-1)}$? (7 pont)

Megoldás: Igaz, két irányú tartalmazással látható be:

$\Rightarrow$:

$(a,b) \in (R^{(-1)})^2 \Rightarrow \exists c : (a,c) \in R^{(-1)} \wedge (c,b) \in R^{(-1)} \Rightarrow (c,a) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (b,a) \in R^2 \Rightarrow (a,b) \in (R^2)^{(-1)}$

$\Leftarrow$:

$(a,b) \in (R^2)^{(-1)} \Rightarrow (b,a) \in R^2 \Rightarrow \exists c : (b,c) \in R \wedge (c,a) \in R \Rightarrow (c,b) \in R^{(-1)} \wedge (a,c) \in R^{(-1)} \Rightarrow (a,b) \in (R^{(-1)})^2$

3. Feladat
$R \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

$$R(a) = \begin{cases} \{a-2\}, & \text{ha } a > 1 \\ \{2^k | k \in \mathbb{N}\}, & \text{ha } a = 1 \end{cases}$$

Mi az R reláció lezártja és korlátos lezártja? (10 pont)

Megoldás: Először adjuk meg a lezárt értelmezési tartományát!

Azok az N_0-beliek, amik nincsenek benne a reláció értelmezési tartományában (a 0), biztos benne vannak a lezárt értelmezési tartományában is. A páros számok is benne vannak, hiszen előbb-utóbb a szükséges végetelen sorozatnak olyan eleme kellene hogy legyen, ami $R(0)$-nak eleme, de ilyen nem létezik. A páratlan számok viszont párosra „vezetnek”, hiszen minden kettő hatvány páros. Továbbá minden a lezárt által értelmezett pontban a lezárt értéke csak a $\{0\}$ lehet, hiszen ez az egyetlen R által nem értelmezett elem.

$\mathcal{D}_{\bar{R}} = N_0 \wedge \forall a \in N_0 : \bar{R}(a) = \{0\}$.

A korlátos lezárt értelmezési tartományából a páratlan számok kiesnek, mivel nem lehet előre megmondani egy olyan lépésszám korlátot ami mellett kettesével csökkentve egy kettő hatvány értékét eljutunk a nullához azon korláton belül. (Hiszen vannak tetszőlegesen nagy kettő hatványok is.)

$\mathcal{D}_{\bar{\bar{R}}} = N_0 \setminus \{x \in N | x \text{ páratlan}\} \wedge \forall x \in D_{\bar{\bar{R}}} : \bar{\bar{R}}(x) = \{0\}$.

4. Feladat
Igaz-e, hogy a programfüggvény értelmezési tartománya éppen A^* ősképe a programra nézve? (4 pont)

Megoldás: A programfüggvény és az őskép definíciója pont ezt az állítást tartalmazza:

$D_{p(S)} = \{a \in A | S(a) \subseteq A^*\}$

$R \subseteq A \times A : R^{-1}(H) = \{a \in D_S | R(a) \subseteq H\}$

És tudjuk, hogy $D_S = A$, mivel programról beszélünk.

5. Feladat
$A = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}. S \subseteq A \times A^{**}$. S az $(1,1,2)$ pontból kiindulva előállítja a 10. Fibonacci számot az $u(n) = u(n-1) + u(n-2)$ rekurzív összefüggés alapján. A koordináták rendre $u(n-2)$-nek, $u(n-1)$-nek és $u(n)$-nek felelnek meg. Írd fel azt a sorozatot, amelyet S az $(1,1,2)$ ponthoz rendel! Mit rendel $p(S)$ az $(1,1,2)$ ponthoz? (7 pont)

Megoldás: $S((1,1,2)) = \{< (1,1,2),(1,2,3),(2,3,5),(3,5,8),(5,8,13),(8,13,21),(13,21,34),(21,34,55) >\}$
$p(S)((1,1,2)) = \{(21,34,55)\}$.

6. Feladat
$\lceil H_1 \rceil, \lceil H_2 \rceil \subseteq A$. Igaz-e, hogy ha minden $S \subseteq A \times A^{**}$ programra $\lceil \mathrm{lf}(S,H_1) \rceil = \lceil \mathrm{lf}(S,H_2) \rceil$, akkor $\lceil H_1 \rceil = \lceil H_2 \rceil$? (10 pont)

Megoldás: Az állítás igaz, indirekt bizonyítás: tegyük fel, hogy a feltételek mellett $\lceil H_1 \rceil \neq \lceil H_2 \rceil$, azaz pl. $\exists a \in \lceil H_1 \rceil : a \notin \lceil H_2 \rceil$. Válasszuk ekkor S-et a következő módon: $\forall b \in A \setminus \{a\} : S(b) = \{< b... >\}$, míg $S(a) = \{< a >\}$. Ezzel $\mathcal{D}_{p(S)} = \{a\} \wedge p(S)(a) = \{a\}$. Azonban ebből már látszik, hogy $\{a\} = \mathrm{lf}(S,H_1) \neq \mathrm{lf}(S,H_2) = \emptyset$, ami ellentmond annak, hogy tetszőlegesen választott programra a leggyengébb előfeltételeknek egyeznie kellene. A halmazok persze úgyis különbözhetnek, hogy $\exists a \in \lceil H_2 \rceil : a \notin \lceil H_1 \rceil$, azonban ekkor a bizonyítás teljesen hasonló, mivel az eset szimmetrikus.

7. Feladat
Állapítsuk meg, hogy mennyi valódi osztója van egy természetes számnak. Specifikáld a feladatot! (Felhasználható a $\chi : \mathbb{L} \to \{0,1\}$ függvény, ami az igaz helyeken 1.) (5 pont)

Megoldás:
$A = \underset{x}{N} \times \underset{d}{N_0}$
$B = \underset{x'}{N}$
$Q = (x = x')$
$R = (Q \wedge d = \sum_{i=2}^{x-1} \chi(i|x))$