„Before software can be reusable it first has to be usable.”
— Ralph Johnson

Bevezetés a programozáshoz 2., 1. zárthelyi dolgozat (megoldás)
2006. március 9. (csütörtök), 8 óra

Specifikáld az alábbi feldatokat, majd add meg a megoldó programokat és helyességük bizonyítását!

1. Feladat
Határozzuk meg az $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ értékét! (13 pont)

Specifikáció: (3 pont)
$A = \underset{n}{\mathbb{N}_0} \times \underset{r}{\mathbb{N}}$
$B = \underset{n'}{\mathbb{Z}}$
$Q = (n = n')$
$R = (Q \wedge r = n!)$

Megoldás:
Most keressük meg a specifikációnak megfelelő megoldó programot! A megoldást úgy sejtjük, hogy egy ciklussal találhatjuk meg. Nos, mi legyen ennek a ciklusnak az invariánsa (és új állapottere)?

$A' = \underset{n}{\mathbb{N}_0} \times \underset{r}{\mathbb{N}} \times \underset{k}{\mathbb{N}_0}$
$P = (Q \wedge k \in [0..n] \wedge r = k!)$ (2 pont)

Ellenőrízzük le a ciklus feltételeit:
1. $\boxed{Q \Rightarrow P}$ (1 pont)

Jól láthatóan nem teljesül, sőt fordítva igaz. Ezért megpróbálunk egy olyan közbülső állapotot felírni, ami a Q-ból könnyedén (egy értékadással) elérhető és ugyanakkor ez a kívánt feltétel teljesül rá. Amennyiben ez sikerül, akkor már csak egy szekvencia közbülső feltételeként kell pillantani erre az új Q' feltételre és máris felírható lesz a kívánt program egy értékadás és egy ciklus szekvenciájaként.

$Q' = (Q \wedge k = 0 \wedge r = 1)$

Látható, hogy $Q' \Rightarrow P$ és $Q \Rightarrow \mathrm{lf}(k, r := 0, 1, Q') = (Q \wedge 0 = 0 \wedge 1 = 1) = Q$.

Tehát a program valahogy így néz ki:

$k, r := 0, 1$	
$\dots$	
	$\dots$

2. $\boxed{P \wedge \neg\pi \Rightarrow R}$ (1 pont)
Ez a feltétel kezünkbe adja a ciklusfeltételt, hiszen P és R összehosonlításából $\neg\pi$-re $k = n$ adódik. Tehát $\pi = (k \neq n)$.

$k, r := 0, 1$	
$k \neq n$	
	$\dots$

3. $\boxed{P \wedge \pi \Rightarrow t > 0}$ (1 pont)
Jelen esetben ez: $Q \wedge k \in [0..n-1] \wedge r = k! \Rightarrow t > 0$. Tehát $t := n - k$ egy megfelelő terminálófüggvény.

4./5. $\boxed{P \wedge \pi \wedge t = t_0 \Rightarrow \mathrm{lf}(S_0, P \wedge t < t_0)}$ (3 pont)

A ciklusmagban k értékét biztos növeljük, viszont az invariánst is meg kell tartanunk, ezt teszi egyszerre a $k, r := k+1, r(k+1)$ szimultán értékadás, lássuk mi ennek a leggyengébb előfeltétele a $P \wedge t = t_0$-ra vonatkozóan: $\mathrm{lf}(k, r := k+1, r(k+1), P \wedge n-k = t_0) = (Q \wedge k+1 \in [0..n] \wedge r(k+1) = (k+1)! \wedge n-k-1 = t_0)$. Ez a feltétel azonban következik $P \wedge \pi \wedge t = t_0$-ból.

(2 pont)

$k, r := 0, 1$
$k \neq n$
$\quad k, r := k+1, r(k+1)$

2. Feladat
Határozzuk meg az „n alatt a k” értékét, kétféleképpen:

- Az előző feladat programjának segítségével, matematikai segítség: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (7 pont)

  Specifikáció: (1 pont)
  $A = \underset{n}{\mathbb{N}} \times \underset{k}{\mathbb{N}} \times \underset{r}{\mathbb{N}}$
  $B = \underset{n'}{\mathbb{N}} \times \underset{k'}{\mathbb{N}}$
  $Q = (n = n' \wedge k = k' \wedge k \leq n)$
  $R = (Q \wedge r = \frac{n!}{k!(n-k)!})$

  Megoldás: (6 pont)
  Kiterjesztjük az állapotteret, bevezetünk egy — az $n-k$ értékét tartalmazó — nk nevű változót, valamint nf, kf, nkf változókat, amik a faktoriálisokat fogják tartalmazni. Felírünk pár köztes állapotot is:
  $A' = \underset{n}{\mathbb{N}} \times \underset{k}{\mathbb{N}} \times \underset{r}{\mathbb{N}} \times \underset{nk}{\mathbb{N}} \times \underset{nf}{\mathbb{N}} \times \underset{kf}{\mathbb{N}} \times \underset{nkf}{\mathbb{N}}$
  $Q' = (Q \wedge nk = n-k)$
  $Q'' = (Q' \wedge nf = n!)$
  $Q''' = (Q'' \wedge kf = k!)$
  $Q'''' = (Q''' \wedge nkf = (n-k)!)$

  Ekkor: $Q \Rightarrow \mathrm{lf}(nk := n-k, Q')$, valamint Q'-ből Q'', Q''-ből Q''' és Q'''-ből Q'''' az előző feladat megoldásaként kapott programmal (persze más változókat használva) elérhető, azokat a részeket újra nem bizonyítjuk. Továbbá: $Q'''' \Rightarrow \mathrm{lf}(r := \frac{nf}{kf*nkf}) = (Q \wedge \frac{nf}{kf*nkf} = \frac{n!}{k!(n-k)!})$. Így a szekvencia levezetési szabálya miatt $Q \Rightarrow lf(S, R)$, ami pont azt jelenti, hogy a program megoldja a feladatot.

	Q
$nk := n-k$	
	Q'
$i, nf := 0, 1$	
$i \neq n$	
$\quad i, nf := i+1, nf(i+1)$	
	Q''
$i, kf := 0, 1$	
$i \neq k$	
$\quad i, kf := i+1, kf(i+1)$	
	Q'''
$i, nkf := 0, 1$	
$i \neq nk$	
$\quad i, nkf := i+1, nkf(i+1)$	
	Q''''
$r := \frac{nf}{kf*nkf}$	
	R

  Mejegyzés: a struktogrammban szereplő i az állapottér egy új, N_0 értékű komponense.

- Más, hatékonyabb módon, segítség: $\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdots 1}$ (15 pont)

  Specifikáció: (5 pont)
  $A = \underset{n}{\mathbb{N}} \times \underset{k}{\mathbb{N}} \times \underset{r}{\mathbb{Q}}$
  $B = \underset{n'}{\mathbb{N}} \times \underset{k'}{\mathbb{N}}$
  $Q = (n = n' \wedge k = k' \wedge k \leq n)$
  $R = \left(Q \wedge r = \prod_{j=1}^{k} \frac{n-k+j}{j} (= \frac{n!}{k!(n-k)!}) \right)$

  Megoldás:
  $A' = \underset{n}{\mathbb{N}} \times \underset{k}{\mathbb{N}} \times \underset{r}{\mathbb{N}} \times \underset{i}{\mathbb{N}_0}$
  $P = \left(Q \wedge i \in [0..k] \wedge r = \prod_{j=1}^{i} \frac{n-k+j}{j}) \right)$ (3 pont)

  1. $\boxed{Q \Rightarrow P}$(1 pont): $Q' = (Q \wedge i = 0 \wedge r = 1)$

  2. $\boxed{P \wedge \neg\pi \Rightarrow R}$(1 pont): $\pi = (i \neq k)$

  3. $\boxed{P \wedge \pi \Rightarrow t > 0}$(1 pont): $t = n - i$

  4./5. $\boxed{P \wedge \pi \wedge t = t_0 \Rightarrow \mathrm{lf}(S_0, P \wedge t < t_0)}$(3 pont): $S_0 : (i, r := i+1, r\frac{n-k+i+1}{i+1})$

  (1 pont)

$i, r := 0, 1$	
$i \neq k$	
	$i, r := i+1, r\frac{n-k+i+1}{i+1}$

3. Feladat
Adott a t négyzetes mátrix. Tükrözzük (transzponáljuk) a mellékátlójára helyben (azaz az eredmény t-ben keletkezzen)! (25 pont)

Szóhasználat: azt fogjuk mondani, hogy t az első n sorában transzponáltja t'-nek, ha $\forall i \in [0, n-1] : (\forall j \in [0, t.dom - i - 1] : (t_{t.lob+i_{t.lob+j}} = t'_{t.hib-j_{t.hib-i}} \wedge t_{t.hib-j_{t.hib-i}} = t'_{t.lob+i_{t.lob+j}}))$. Másrészt t $n+1$. sora az $i+1$. elemig transzponálva van, ha $\forall j \in [0, i] : (t_{t.lob+n_{t.lob+j}} = t'_{t.hib-j_{t.hib-n}} \wedge t_{t.hib-j} + t.hib - n = t'_{t.lob+n_{t.lob+j}})$

Specifikáció: (6 pont)
$\mathbb{M} = \mathrm{vect}(\mathbb{Z}, \mathrm{vect}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}))$, invariánsa: $I(x) = (\forall i \in [x.lob, x.hib] : x_i.lob = x.lob \wedge x_i.hib = x.hib)$
$A = \underset{t}{\mathbb{M}}$
$B = \underset{t'}{\mathbb{M}}$
$Q = (t = t')$
$R = (t$ az első $t.dom$ sorában transzponáltja t'-nek$)$

Megoldás:
$A' = \underset{t}{\mathbb{M}} \times \underset{k}{\mathbb{N}_0} \times \underset{l}{\mathbb{N}_0}$
$P = (k \in [0, t.dom] \wedge t$ az első k sorában transzponáltja t'-nek$)$ (3 pont)
1. $\boxed{Q \Rightarrow P}$(1 pont): $Q' = (Q \wedge k = 0)$

2. $\boxed{P \wedge \neg\pi \Rightarrow R}$(1 pont): $pi = (k \neq t.dom)$

3. $\boxed{P \wedge \pi \Rightarrow t > 0}$(1 pont): $t^* = t.dom - k)$

4./5. $\boxed{P \wedge \pi \wedge t = t_0 \Rightarrow \mathrm{lf}(S_0, P \wedge t < t_0)}$: egy szekvenciával, aminek első fele egy újabb ciklus:

$R_b = Q'' = (k \in [0, t.dom-1] \wedge t$ az első $k+1$ sorában transzponáltja t'-nek $\wedge\, t^* = t^*_0)$ (1 pont)
vegyük észre: $R_b = (k \in [0, t.dom-1] \wedge t$ az első k sorában transzponáltja t'-nek $\wedge\, t^* = t^*_0 \wedge t$ $k+1$. sora az $t.dom-k$ elemig transzponálva van.$)$
$R_b \Rightarrow \mathrm{lf}(k := k+1, P \wedge t^* < t^*_0)$ (1 pont)
$Q_b = (P \wedge \pi \wedge t^* = t^*_0) = (k \in [0, t.dom-1] \wedge t$ az első k sorában transzponáltja t'-nek $\wedge\, t^* = t^*_0)$
$P_b = (k \in [0, t.dom-1] \wedge l \in [0, t.dom-k] \wedge t$ az első k sorában transzponáltja t'-nek $\wedge\, t^* = t^*_0 \wedge t$ $k+1$. sora az l elemig transzponálva van.$)$ (3 pont)
$Q'_b = (k \in [0, t.dom-1] \wedge l = 0 \wedge t$ az első k sorában transzponáltja t'-nek$)$
$\pi_b = (l \neq t.dom-k)$ (1 pont)
$t^*_b = (t.dom-k-l)$ (1 pont)
$Q''_b = (k \in [0, t.dom-1] \wedge l \in [0, t.dom-k-1] \wedge t$ az első k sorában transzponáltja t'-nek $\wedge\, t^* = t^*_0 \wedge t$ $k+1$. sora az $l+1$ elemig transzponálva van. $\wedge\, t^*_b = t^*_{b\,0})$ (3 pont)

(3 pont)

	Q
$k := 0$	
	Q'
$k \neq t.dom$	
	Q_b
$l := 0$	
	Q'_b
$l \neq t.dom-k$	
	$P_b \wedge \pi_b \wedge t^*_b = t^*_{b\,0}$
$t_{t.lob+k_{t.lob+l}}, t_{t.hib-l_{t.hib-k}} := t'_{t.hib-l_{t.hib-k}}, t'_{t.lob+k_{t.lob+l}}$	
	Q''_b
$l := l+1$	
	R_b
$k := k+1$	
	R