

*Feladat:* Adott az  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{H}$  monoton növekvő függvény és az  $[m..n] \subset \mathbb{Z}$  intervallum, valamint a  $h \in \mathcal{H}$  érték. Döntsük el, hogy van-e az intervallumban olyan érték, amire  $f(i) = h$ !

Ez a feladat a logaritmus keresés. Próbáljunk meg olyan specifikációt és visszavezetést adni, ami a lineáris keresés 3. verziójára vezet!

$$\begin{aligned} \varphi &: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{L} \\ \varphi(0) &:= (m, n, \text{hamis}) \\ \forall i \geq 1 : \varphi(i) &:= F(i, \varphi(i-1)) \\ F(i, z) &:= \begin{cases} (\star, \star, \text{igaz}) & \text{ha } z.1 \leq z.2 \wedge f(\star) = h \\ (\star + 1, z.2, \text{hamis}) & \text{ha } z.1 \leq z.2 \wedge f(\star) < h \\ (z.1, \star - 1, \text{hamis}) & \text{ha } z.1 \leq z.2 \wedge f(\star) > h \\ z & \text{ha } z.1 > z.2 \end{cases} \quad \left( \text{ahol } \star = \left\lceil \frac{z.1 + z.2}{2} \right\rceil \right) \\ \gamma(i) &:= \varphi(i).3 \quad (i \geq 0) \\ \delta(i) &:= \varphi(i).1 > \varphi(i).2 \quad (i \geq 0) \\ \beta(i) &:= \gamma(i) \vee \delta(i) \quad (i \geq 0) \end{aligned}$$

Mivel a  $\varphi$  rekurzív függvény első két eredménykomponense által megadott intervallum folyamatosan csökken, amíg a harmadik komponens hamis,  $\beta$  biztosan teljesül elég nagy  $i$ -re. Feladatunk, hogy megállapítsuk, van-e olyan természetes szám, ahol  $\gamma$  igaz. Ha van ilyen  $\gamma$ , akkor  $\delta$  előtte sehol nem igaz, hiszen, ha  $\delta$  egyszer teljesül, akkor a rekurzív függvény onnantól kezdve folyamatosan ugyanazt az értéket veszi fel, ami pedig nem  $\gamma$  tulajdonságú.

*Specifikáció:*

$\mathbb{D} = (\mathbb{Z} : a, \mathbb{Z} : b, \mathbb{L} : l)$  rekord, így  $\varphi$  felfogható, mint  $\varphi : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{D}$  függvény.

$$A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathcal{H} \times \mathbb{L}$$

$m \quad n \quad h \quad l$

$$B = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

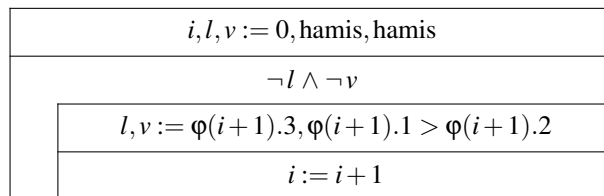
$m' \quad n'$

$$Q = (m = m' \wedge n = n' \wedge m \leq n \wedge \forall k, j \in [m..n] : (k < j) \rightarrow (f(k) \leq f(j)) \wedge \exists j \geq 1 : \beta(j))$$

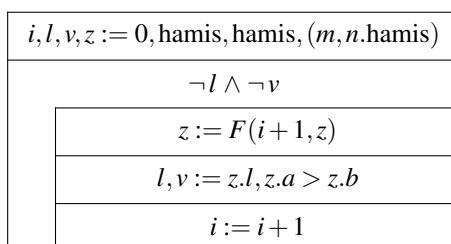
$$R = (Q \wedge l = (\exists j \geq 1 : \gamma(j) \wedge \forall k \in [m..j-1] : \neg \delta(k)))$$

feladat		lin. ker. 3	
1	↔	$m$	(alteres, konstanssal helyettesítés)
$l$	↔	$u$	
–	↔	$i$	(alteres, általánosított)

A visszavezetés általánosított amiatt is, mert az előfeltétel szigorúbb, a lineáris keresés nem követeli meg egy függvény monotonosságát.



Helyettesítsük a  $\varphi$  rekurzívfüggvény a  $z$  változóval, amely  $\mathbb{D}$  típusú:



Az  $F$  függvény kiszámítható elágazással:

$i, l, v, z := 0, \text{hamis}, \text{hamis}, (m, n, \text{hamis})$			
$\neg l \wedge \neg v$			
$z.a \leq z.b \wedge f(\star) = h$	$z.a \leq z.b \wedge f(\star) < h$	$z.a \leq z.b \wedge f(\star) > h$	$z.a > z.b$
$z := (\star, \star, \text{igaz})$	$z := (\star + 1, z.b, \text{hamis})$	$z := (z.a, \star - 1, \text{hamis})$	SKIP
$l, v := z.l, z.a > z.b$			
$i := i + 1$			

$i$  sosem szerepel értékadás jobb oldalán vagy feltételben, így elhagyható,  $z.l$  pedig pont ugyanazt az értéket veszi fel mindig, mint  $l$ , így  $l$  helyettesíthető  $z.l$ -lel,  $v$  úgy küszöbölhető ki, ha a „nem megengedett ciklusfeltétel kitranszformálása” programtranszformációt alkalmazzuk visszafelé. Mindezen átalakítások közben a  $z$  rekordváltozót helyettesítsük az  $a, b, e$  változókkal!

$a, b, e := m, n, \text{hamis}$			
$\neg e \wedge a \leq b$			
$a \leq b \wedge f(\star) = h$	$a \leq b \wedge f(\star) < h$	$a \leq b \wedge f(\star) > h$	$a > b$
$a, b, e := \star, \star, \text{igaz}$	$a, b, e := \star + 1, b, \text{hamis}$	$a, b, e := a, \star - 1, \text{hamis}$	SKIP

A program kis egyszerű átalakításokkal (a fölösleges szimultán értékadásrészek elhagyásával, a  $\star$  jelölés egy külön  $i$  változóval való helyettesítésével, a sosem végrehajtható utolsó elágazáság elhagyásával) lényegében a logaritmus keresés programjává transzformálható.

A programról látható, hogy az  $e$  változót csak akkor állítja igazra, ha mellette az  $a$  értéket olyanra állítja, hogy  $f(a) = h$ . Ezzel a megfontolással a keresett elem megtalálására is felhasználhatjuk a programunkat nem csak a létezés megállapítására.

Annyiban csaltunk, hogy a rekurzív függvényről, amit csak úgy kitaláltunk, illene bebizonyítani, hogy tényleg akkor vesz fel valahol a harmadik komponensében igaz értéket, ha az eredeti függvény felvesz az  $[m..n]$  intervallumon  $h$  értéket.

•  $\exists i \geq 1 : \varphi(i).3 \stackrel{?}{\Rightarrow} \exists i \in [m..n] : f(i) = h$

Trivialitás, ugyanis az  $F$  függvény úgy van definiálva, hogy a  $\star$  pont egy ilyen  $i$ .

•  $\exists i \in [m..n] : f(i) = h \stackrel{?}{\Rightarrow} \exists i \geq 1 : \varphi(i).3$

Tegyük fel, hogy  $\forall x \geq 1 : \neg \varphi(x).3$ .

Ekkor teljes indukcióval belátjuk, hogy  $\varphi(x) = (a, b, \text{hamis})$  esetén  $f(a) \leq h = f(i) \leq f(b)$  és  $a \leq b$ .

Ez igaz  $\varphi(0) = (m, n, \text{hamis})$ -ra felhasználva a tétel feltételrészét és  $f$  monotonitását.

Rögzített  $x$  mellett  $\varphi(x+1)$ -re az  $f(\star)$  függvényértéktől függően az alábbi teljesülhet:

- $f(\star) = h$ , ekkor  $\varphi(x+1).3 = \text{igaz}$ , ami ellentmondás.
- $f(\star) < h$ , ekkor tudjuk  $f$  monotonitásából, hogy  $\forall j \in [a, \star] : f(j) < h$ , ezért  $x+1$ -re is teljesül az elvárt  $f(\star+1) \leq h \leq f(b)$  állítás. És  $\star+1 \leq b$ -nek is teljesülnie kell  $f$  monotonitása miatt, hiszen  $b$  fölött már a  $h$ -nál nagyobb értékek vannak és a tételben feltettük, hogy található  $h$  érték az  $f$  értékei között.
- $f(\star) > h$  esetén hasonlóan belátható, hogy vagy ellentmondásra jutunk vagy igaz a indukció.

Tehát kiderült, hogy minden  $x$ -re  $\varphi(x) = (a, b, \text{hamis})$  mellett  $a \leq b$ , ami viszont lehetetlen, hiszen az  $a, b$  intervallum folyamatosan szűkül és kezdetben csak véges nagy volt. Az eredeti feltételezésünk helytelen volt, tehát amennyiben az  $f$  függvényben megtalálható a  $h$  érték, akkor a  $\varphi$  függvény harmadik komponense előbb-utóbb igaz értéket vesz fel.