Feladat: Adott az $f : \mathbb{Z} \to \mathcal{H}$ monoton növő függvény és az $[m..n] \subset \mathbb{Z}$ intervallum, valamint a $h \in \mathcal{H}$ érték. Döntsük el, hogy van-e az intervallumban olyan érték, amire $f(i) = h$!

Ez a feladat a logaritmikus keresés. Próbáljunk meg olyan specifikációt és visszavezetést adni, ami a lineáris keresés 3. verziójára vezet!

$$\varphi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{L}$$
$$\varphi(0) := (m, n, \text{hamis})$$
$$\forall i \geq 1 : \varphi(i) := F(i, \varphi(i-1))$$
$$F(i,z) := \begin{cases} (\star, \star, \text{igaz}) & \text{ha } z.1 \leq z.2 \wedge f(\star) = h \\ (\star + 1, z.2, \text{hamis}) & \text{ha } z.1 \leq z.2 \wedge f(\star) < h \\ (z.1, \star - 1, \text{hamis}) & \text{ha } z.1 \leq z.2 \wedge f(\star) > h \\ z & \text{ha } z.1 > z.2 \end{cases} \qquad \left(\text{ahol } \star = \left\lceil \frac{z.1 + z.2}{2} \right\rceil \right)$$
$$\gamma(i) := \varphi(i).3 \qquad (i \geq 0)$$
$$\delta(i) := \varphi(i).1 > \varphi(i).2 \qquad (i \geq 0)$$
$$\beta(i) := \gamma(i) \vee \delta(i) \qquad (i \geq 0)$$

Mivel a φ rekurzív függvény első két eredménykomponense által megadott intervallum folyamatosan csökken, amíg a harmadik komponens hamis, β biztosan teljesül elég nagy i-re. Feladatunk, hogy megállapítsuk, van-e olyan természetes szám, ahol γ igaz. Ha van ilyen γ, akkor δ előtte sehol nem igaz, hiszen, ha δ egyszer teljesül, akkor a rekurzív függvény onnantól kezdve folyamatosan ugyanazt az értéket veszi fel, ami pedig nem γ tulajdonságú.

Specifikáció:
$\mathbb{D} = (\mathbb{Z} : a, \mathbb{Z} : b, \mathbb{L} : l)$ rekord, így φ felfogható, mint $\varphi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{D}$ függvény.
$A = \underset{m}{\mathbb{Z}} \times \underset{n}{\mathbb{Z}} \times \underset{h}{\mathcal{H}} \times \underset{l}{\mathbb{L}}$
$B = \underset{m'}{\mathbb{Z}} \times \underset{n'}{\mathbb{Z}}$
$Q = (m = m' \wedge n = n' \wedge m \leq n \wedge \forall k, j \in [m,n] : (k < j) \to (f(k) \leq f(j)) \wedge \exists j \geq 1 : \beta(j))$
$R = (Q \wedge l = (\exists j \geq 1 : \gamma(j) \wedge \forall k \in [m..j-1] : \neg\delta(k)))$

feladat		lin. ker. 3	
1	$\leftrightarrow$	m	(alteres, konstanssal helyettesítés)
l	$\leftrightarrow$	u	
$-$	$\leftrightarrow$	i	(alteres, általánosított)

A visszavezetés általánosított amiatt is, mert az előfeltétel szigorúbb, a lineáris keresés nem követeli meg egy függvény monotonságát.

$i, l, v := 0, \text{hamis}, \text{hamis}$	
$\neg l \wedge \neg v$	
	$l, v := \varphi(i+1).3, \varphi(i+1).1 > \varphi(i+1).2$
	$i := i + 1$

Helyettesítsük a φ rekurzívfüggvény a z változóval, amely $\mathbb{D}$ típusú:

$i, l, v, z := 0, \text{hamis}, \text{hamis}, (m, n.\text{hamis})$	
$\neg l \wedge \neg v$	
	$z := F(i+1, z)$
	$l, v := z.l, z.a > z.b$
	$i := i + 1$

Az F függvény kiszámítható elágazással:

$i, l, v, z := 0, \text{hamis}, \text{hamis}, (m, n.\text{hamis})$			
$\neg l \wedge \neg v$			
$z.a \leq z.b \wedge f(\star) = h$	$z.a \leq z.b \wedge f(\star) < h$	$z.a \leq z.b \wedge f(\star) > h$	$z.a > z.b$
$z := (\star, \star, \text{igaz})$	$z := (\star + 1, z.b, \text{hamis})$	$z := (z.a, \star - 1, \text{hamis})$	SKIP
$l, v := z.l, z.a > z.b$			
$i := i + 1$			

i sosem szerepel értékadás jobb oldalán vagy feltételben, így elhagyható, $z.l$ pedig pont ugyanazt az értéket veszi fel mindig, mint l, így l helyettesíthető $z.l$-lel, v úgy küszöbölhető ki, ha a „nem megengedett ciklusfeltétel kitranszformálása" programtranszformációt alkalmazzuk visszafele. Mindezen átalakítások közben a z rekordváltozót helyettesítsük az a, b, e változókkal!

$a, b, e := m, n.\text{hamis}$			
$\neg e \wedge a \leq b$			
$a \leq b \wedge f(\star) = h$	$a \leq b \wedge f(\star) < h$	$a \leq b \wedge f(\star) > h$	$a > b$
$a, b, e := \star, \star, \text{igaz}$	$a, b, e := \star + 1, b, \text{hamis}$	$a, b, e := a, \star - 1, \text{hamis}$	SKIP

A program kis egyszerű átalakításokkal (a fölösleges szimultán értékadásrészek elhagyásával, a $\star$ jelölés egy külön i változóval való helyettesítésével, a sosem végrehajtódó utolsó elágazáság elhagyásával) lényegében a logaritmikus keresés programjává transzformálható.

A programról látható, hogy az e változót csak akkor állítja igazra, ha mellette az a értéket olyanra állítja, hogy $f(a) = h$. Ezzel a meggondolással a keresett elem megtalálására is felhasználhatjuk a programunkat nem csak a létezés megállapítására.

Annyiban csaltunk, hogy a rekurzív függvényről, amit csak úgy kitaláltunk, illene bebizonyítani, hogy tényleg akkor vesz fel valahol a harmadik komponensében igaz értéket, ha az eredeti függvény felvesz az $[m..n]$ intervallumon h értéket.

- $\exists i \geq 1 : \varphi(i).3 \stackrel{?}{\Rightarrow} \exists i \in [m..n] : f(i) = h$

  Trivialitás, ugyanis az F függvény úgy van definiálva, hogy a $\star$ pont egy ilyen i.

- $\exists i \in [m..n] : f(i) = h \stackrel{?}{\Rightarrow} \exists i \geq 1 : \varphi(i).3$

  Tegyük fel, hogy $\forall x \geq 1 : \neg \varphi(x).3$.

  Ekkor teljes indukcióval belátjuk, hogy $\varphi(x) = (a, b, \text{hamis})$ esetén $f(a) \leq h = f(i) \leq f(b)$ és $a \leq b$.
  Ez igaz $\varphi(0) = (m, n, \text{hamis})$-ra felhasználva a tétel feltételrészét és f monotonitását.
  Rögzített x mellett $\varphi(x+1)$-re az $f(\star)$ függvényértéktől függően az alábbi teljesülhet:

  - $f(\star) = h$, ekkor $\varphi(x+1).3 = \text{igaz}$, ami ellentmondás.
  - $f(\star) < h$, ekkor tudjuk f monotonitásából, hogy $\forall j \in [a, \star] : f(j) < h$, ezért $x+1$-re is teljesül az elvárt $f(\star + 1) \leq h \leq f(b)$ állítás. És $\star + 1 \leq b$-nek is teljesülnie kell f monotonitása miatt, hiszen b fölött már a h-nál nagyobb értékek vannak és a tételben feltettük, hogy található h érték az f értékei között.
  - $f(\star) > h$ esetén hasonlóan belátható, hogy vagy ellentmondásra jutunk vagy igaz a indukció.

  Tehát kiderült, hogy minden x-re $\varphi(x) = (a, b, hamis)$ mellett $a \leq b$, ami viszont lehetetlen, hiszen az a, b intervallum folyamatosan szűkűl és kezdetben csak véges nagy volt. Az eredeti feltételezésünk helytelen volt, tehát amennyiben az f függvényben megtalálható a h érték, akkor a φ függvény harmadik komponense előbb-utóbb igaz értéket vesz fel.