Feladat: Adott a síkon több darab pont egy vektorban. Állapítsuk meg, melyik a két legtávolabbi pont!

Specifikáció:
$R_{\text{PONT}} = (x : \mathbb{Z}, y : \mathbb{Z})$
$\mathbb{V} = \text{vect}(\mathbb{Z}, R_{\text{PONT}})$
$A = \underset{v}{\mathbb{V}} \times \underset{i}{\mathbb{N}_0} \times \underset{p_1}{R_{\text{PONT}}} \times \underset{p_2}{R_{\text{PONT}}}$
$B = \underset{v'}{\mathbb{V}}$
$Q = (v = v' \wedge v.dom \geq 2)$
$R' = (Q \wedge i \in [0, \text{db}(v) - 1] \wedge \forall j \in [0, \text{db}(v) - 1] : t(f(i)) \geq t(f(j)))$
$R = (R' \wedge p_1 = v_{v.\text{lob}+f(i)_1} \wedge p_2 = v_{v.\text{lob}+f(i)_2})$

Ahol:

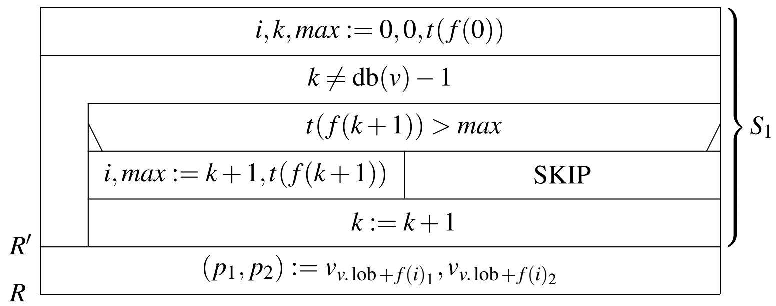
- $\text{db}(v) := \frac{v.\text{dom}(v.\text{dom}-1)}{2}$, megadja, hogy a v vektorban hány összehasonlítandó pontpár van,
- $f^{(-1)} : \mathbb{N}_\circ \times \mathbb{N}_\circ \to \mathbb{N}_\circ, \forall 0 \leq j < i \leq n-1 : f^{(-1)}(i,j) := \frac{i(i-1)}{2} + j$, bijektív megfeleltetés $[0, db(v) - 1]$ intervallum elemei és a $(v.lob + i, v.lob + j)$ olyan indexpárok között, amik esetén $0 \leq j < i \leq n-1$. Tehát az f függvény inverze minden összehasonlítandó indexpárhoz a intervallum egy elemét rendeli egyértelműen. Ez azt jelenti, hogy az f függvény maga, az intervallumról az összehasonlítandó indexpárokra képez egyértelműen! Ez nagyon szerencsés, úgyhogy számoljuk is ki az f függvényt:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{i(i-1)}{2} \\
2x &= i^2 - i \\
0 &= i^2 - i - 2x \\
i &= \frac{1+\sqrt{1+8x}}{2} \quad \text{(ugyanis csak a pozitív gyök érdekes)} \\
f(x)_1 &= \left\lfloor \frac{1+\sqrt{1+8x}}{2} \right\rfloor \\
f(x)_2 &= x - \frac{f(x)_1(f(x)_1 - 1)}{2},
\end{aligned}$$

- $t((i,j)) := (v_{v.\text{lob}+i}.x - v_{v.\text{lob}+j}.x)^2 + (v_{v.\text{lob}+i}.y - v_{v.\text{lob}+j}.y)^2$, megadja két vektorindex által megjelölt pontok távolságnégyzetét.

Ha a kiszámolt f függvényben lévő gyökvonás megengedett, akkor a feladat egyszerűen egy maximumkeresés, ahol csak az i eredménykomponensre vagyunk kiváncsiak, a maximumot pedig a $t(f(i))$ függvény szerint keressük. A visszavezetés alteres általánosított (max).

feladat		max. ker.
0	$\leftrightarrow$	m
$\text{db}(v) - 1$	$\leftrightarrow$	n
$t(f(i))$	$\leftrightarrow$	$f(i)$



$R' = \text{lf}((p_1, p_2) := v_{v.\text{lob}+f(i)_1}, v_{v.\text{lob}+f(i)_2}, R)$, így az utolsó értékadás valóban helyes.

Mi a helyzet, ha a gyökvonás nem megengedett?

Nos, ekkor vegyük észre, hogy az f függvény megfogalmazható rekurzívan, az inverze ismerete nélkül közvetlenül is:

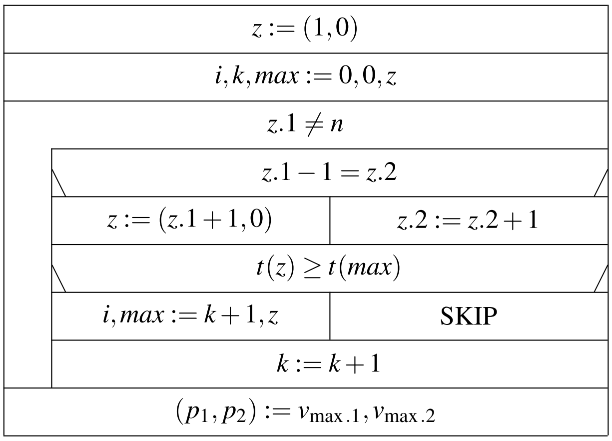
$$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$$
$$f(0) := (1,0)$$
$$\forall i > 0 : f(i) := F(i, f(i-1))$$
$$F(i,x) := \begin{cases} (x_1+1, 0) & , \text{ha } x_1 - 1 = x_2 \\ (x_2, x_2+1) & , \text{ha } x_1 - 1 \neq x_2 \end{cases}$$

$R_{\text{PONTPÁR}} = (p_1 : R_{\text{PONT}}, p_2 : R_{\text{PONT}})$
$A = \underset{v}{\mathbb{V}} \times \underset{\max}{R_{\text{PONTPÁR}}}$
$B = \underset{v'}{\mathbb{V}}$
$Q = (v = v' \wedge v.dom \geq 2)$
$R' = (Q \wedge \exists i \in [0, \text{db}(v)-1] : \max = f(i) \wedge \forall j \in [0, \text{db}(v)-1] : \max \geq^* f(j))$, ahol a $\geq^*$ reláció pontpárokat hasonlít össze a t függvény segítségével, úgy, hogy $f(i) \geq^* f(j)$ acsa., ha $t(f(i)) \geq t(f(j))$.
$R = (R' \wedge (p_1, p_2) = (v_{v.\text{lob}+\max.1}, v_{v.\text{lob}+\max.2}))$

Azaz ez egy alteres általánosított (i) visszavezetés az alábbi megfeleltetésekkel:

feladat		max. ker.
0	$\leftrightarrow$	m
$\text{db}(v)-1$	$\leftrightarrow$	n
$\geq^*$	$\leftrightarrow$	$\geq$

Az f rekurzív függvény helyettesíthető változóval. Használjuk fel azt is, hogy a $db(v) - 1 = k$ akkor teljesül először, amikor $z.1 = n$:



A programban i csak értékadások baloldalán szerepel és az utófeltétel sem támaszkodik rá, eltávolítható. Eltávolítása után a programban k csak értékadások baloldalán szerepel, tehát: