*Feladat:* Adott egy egész számokból álló vektor és két egész szám. Állapítsuk meg, hogy a két szám előfordul-e a vektorban, és ha igen, akkor melyik előbb!

*Specifikáció:*
$\mathbb{V} = \text{vect}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$
$A = \underset{v}{\mathbb{V}} \times \underset{z_1}{\mathbb{Z}} \times \underset{z_2}{\mathbb{Z}} \times \underset{l_1}{\mathbb{L}} \times \underset{l_2}{\mathbb{L}} \times \underset{r}{\{1,2\}} \times \underset{rsz}{\mathbb{Z}} \times \underset{k}{\mathbb{Z}}$
$B = \underset{v'}{\mathbb{V}} \times \underset{z_1'}{\mathbb{Z}} \times \underset{z_2'}{\mathbb{Z}}$
$Q = (v = v' \wedge z_1 = z_1' \wedge z_2 = z_2' \wedge z_2 \neq z_1)$
$R = (Q \wedge \forall i \in [1..2] : l_i = (\exists j \in [v.lob..v.hib] : z_i = v[j]) \wedge (l_1 \wedge l_2) \rightarrow (r = 1 \leftrightarrow g(z_1) < g(z_2)) \wedge (l_1 \wedge \neg l_2) \rightarrow r = 1 \wedge (l_2 \wedge \neg l_1) \rightarrow r = 2 \wedge (l_1 \vee l_2) \rightarrow rsz = z_r)$, ahol
$\mathcal{D}_g = \{x \in \mathbb{Z} | \exists i \in [v.lob..v.hib] : v[i] = x\}, \forall x \in \mathcal{D}_g : g(x) := i$, ha $i \in [v.lob..v.hib] \wedge v[i] = x \wedge \forall j \in [v.lob..i-1] : v[j] \neq x$
Informálisan: g(x) x első előfordulásának indexét adja meg a vektorban. A specifikáció tehát azt írja le, hogy a két logikai változó külön-külön mutatja a program lefutása végén, hogy előfordulnak-e az adott egész számok. Ha mindkettő előfordul, akkor a korábban előforduló számot tartalmazza *rsz* és a hozzá tartozó „indexet” *r*. Amennyiben csak az egyik szám fordul elő, akkor az *rsz* ezt a számot, míg az *r* az „indexét” tartalmazza.

*Megoldás:*
Most keressük meg a specifikációnak megfelelő megoldó programot! A megoldást úgy sejtjük, hogy egy ciklussal találhatjuk meg. Nos, mi legyen ennek a ciklusnak az invariánsa?

$P = (Q \wedge k \in [v.lob-1..v.hib] \wedge \forall i \in [1..2] : l_i = (\exists j \in [v.lob..k] : z_i = v[j]) \wedge (l_1 \wedge l_2) \rightarrow (r = 1 \leftrightarrow g(z_1) < g(z_2)) \wedge (l_1 \wedge \neg l_2) \rightarrow r = 1 \wedge (l_2 \wedge \neg l_1) \rightarrow r = 2 \wedge (l_1 \vee l_2) \rightarrow rsz = z_r)$

Ellenőrízzük le a ciklus feltételeit:
1. $\boxed{Q \Rightarrow P}$

Jól láthatóan nem teljesül, sőt fordítva igaz. Ezért megpróbálunk egy olyan közbülső állapotot felírni, ami a $Q$-ból könnyedén (egy értékadással) elérhető és ugyanakkor ez a kívánt feltétel teljesül rá. Amennyiben ez sikerül, akkor már csak egy szekvencia közbülső feltételeként kell pillantani erre az új $Q'$ feltételre és máris felírható lesz a kívánt program egy értékadás és egy ciklus szekvenciájaként.

$Q' = (Q \wedge k = v.lob - 1 \wedge l_1 = \text{hamis} \wedge l_2 = \text{hamis})$

Látható, hogy $Q' \Rightarrow P$ és $Q \Rightarrow \text{lf}(k, l_1, l_2 := v.lob - 1, \text{hamis}, \text{hamis}, Q') = Q$.

Tehát a program valahogy így néz ki:

| |
|---|
| $k, l_1, l_2 := v.lob - 1, \text{hamis}, \text{hamis}$ |
| $\dots$ |
| $\dots$ |

2. $\boxed{P \wedge \neg\pi \Rightarrow R}$
Ez a feltétel kezünkbe adja a ciklusfeltételt, hiszen $P$ és $R$ összehosonlításából $\neg\pi$-re $k = v.hib$ adódik. Ugyanakkor az állítás még akkor is igaz, ha hozzávesszük $\vee\, l_1 \wedge l_2$-t. Tehát $\pi = (k \neq v.hib \wedge \neg(l_1 \wedge l_2))$.

| |
|---|
| $k, l_1, l_2 := v.lob - 1, \text{hamis}, \text{hamis}$ |
| $k \neq v.hib \wedge \neg(l_1 \wedge l_2)$ |
| $\dots$ |

3. $\boxed{P \wedge \pi \Rightarrow t > 0}$
Jelen esetben ez: $Q \wedge k \in [v.lob-1..v.hib-1] \wedge \dots \Rightarrow t > 0$. Tehát $t := v.hib - k$ egy megfelelő terminálófüggvény.
5. $\boxed{P \wedge \pi \wedge t = t_0 \Rightarrow \text{lf}(S_0, t < t_0)}$

Előrevéve az utolsó feltételt már most biztosíthatjuk, hogy a programunk lefutása véges legyen. Mivel $t = v.hib - k$ és $v.hib$ az invariáns szerint nem változhat, a megoldás csak $k$ növelése lehet.

| $k, l_1, l_2 := v.lob - 1, \text{hamis}, \text{hamis}$ |
|---|
| $k \neq v.hib \wedge \neg(l_1 \wedge l_2)$ |
| $k := k + 1$ |

$P \wedge \pi \wedge t = t_0 \Rightarrow t = t_0 \Leftrightarrow v.hib - k = t_0 \overset{?}{\Rightarrow} \text{lf}(S_0, v.hib - k < t_0) = v.hib - k - 1 < t_0 \surd$

4. $\boxed{P \wedge \pi \Rightarrow \text{lf}(S_0, P)}$

Könnyedén látható, hogy a jelenlegi ciklusmag ezt a feltételt nem teljesíti, hiszen $\text{lf}(S_0, P) = (Q \wedge k+1 \in [v.lob - 1..v.hib] \wedge \forall i \in [1..2] : l_i = (\exists j \in [v.lob..k+1] : z_i = v[j]) \wedge (l_1 \wedge l_2) \rightarrow (r = 1 \leftrightarrow g(z_1) < g(z_2)) \wedge (l_1 \wedge \neg l_2) \rightarrow r = 1 \wedge (l_2 \wedge \neg l_1) \rightarrow r = 2 \wedge (l_1 \vee l_2) \rightarrow rsz = z_r) =: Q''$, nem következik $P \wedge \pi$-ből (például abban az esetben, ha $l_1$ hamis, de $v[k+1] = z_1$).

Ezért egy szekvencia második fele lesz az eddigi ciklusmag és $Q''$-t pedig a következő elágazással érjük el a szekvencia első részében:

| $z_1 \neq v[k+1] \wedge z_2 \neq v[k+1]$ | $\neg l_1 \wedge \neg l_2 \wedge v[k+1] = z_1$ | $\neg l_1 \wedge \neg l_2 \wedge v[k+1] = z_2$ | $\neg l_1 \wedge l_2 \wedge v[k+1] = z_1$ | $\neg l_1 \wedge l_2 \wedge v[k+1] \neq z_1$ | $\neg l_2 \wedge l_1 \wedge v[k+1] = z_2$ | $\neg l_2 \wedge l_1 \wedge v[k+1] \neq z_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $SKIP$ | $l_1, r, rsz :=$ igaz$, 1, z_1$ | $l_2, r, rsz :=$ igaz$, 2, z_2$ | $l_1 :=$ igaz | $SKIP$ | $l_2 :=$ igaz | $SKIP$ |

$P \wedge \pi \Rightarrow lf(IF, Q'')$

Ezen állítás igazolásához az elágazás levezetési szabályának feltételeit kell ellenőríznunk:

4/1. $\boxed{P \wedge \pi \Rightarrow \left(\bigvee_{i=1}^{n} \pi_i\right)}$

A feltételek közös diszjunkciójának átalakításaival megkaphatjuk, hogy az említett diszjunkció csak abban az esetben lehet hamis, ha $l_1 \wedge l_2$, ezt azonban $P \wedge \pi$ kizárja.

4/2. $\boxed{\forall i \in [1..n] : P \wedge \pi \wedge \pi_i \Rightarrow \text{lf}(S_i, Q'')}$

1. $z_1 \neq v[k+1] \wedge z_2 \neq v[k+1] \vee l_1 \wedge l_2$
   $Q \wedge k \in [v.lob - 1..v.hib - 1] \wedge \forall i \in [1..2] : l_i = (\exists j \in [v.lob..k] : z_i = v[j]) \wedge \neg(l_1 \wedge l_2) \wedge (l_1 \wedge \neg l_2) \rightarrow r = 1 \wedge (l_2 \wedge \neg l_1) \rightarrow r = 2 \wedge (l_1 \vee l_2) \rightarrow rsz = z_r) \wedge z_1 \neq v[k+1] \wedge z_2 \neq v[k+1]$
   $\overset{?}{\Rightarrow} lf(SKIP, Q'') = (Q \wedge k+1 \in [v.lob - 1..v.hib] \wedge \forall i \in [1..2] : l_i = (\exists j \in [v.lob..k+1] : z_i = v[j]) \wedge (l_1 \wedge l_2) \rightarrow (r = 1 \leftrightarrow g(z_1) < g(z_2)) \wedge (l_1 \wedge \neg l_2) \rightarrow r = 1 \wedge (l_2 \wedge \neg l_1) \rightarrow r = 2 \wedge (l_1 \vee l_2) \rightarrow rsz = z_r) \surd$

2. $\neg l_1 \wedge \neg l_2 \wedge v[k+1] = z_1$
   $Q \wedge k \in [v.lob - 1..v.hib - 1] \wedge \forall i \in [1..2] : l_i = (\exists j \in [v.lob..k] : z_i = v[j]) \wedge \neg(l_1 \wedge l_2) \wedge (l_1 \wedge \neg l_2) \rightarrow r = 1 \wedge (l_2 \wedge \neg l_1) \rightarrow r = 2 \wedge (l_1 \vee l_2) \rightarrow rsz = z_r) \wedge v[k+1] = z_1 \wedge \neg l_1 \wedge \neg l_2$
   $\overset{?}{\Rightarrow} lf(l_1, r, rsz := \text{igaz}, 1, z_1, Q'') = (Q \wedge k+1 \in [v.lob - 1..v.hib] \wedge \text{igaz} = (\exists j \in [v.lob..k+1] : z_1 = v[j]) \wedge l_2 = (\exists j \in [v.lob..k+1] : z_2 = v[j]) \wedge (\text{igaz} \wedge l_2) \rightarrow (1 = 1 \leftrightarrow g(z_1) < g(z_2)) \wedge (\text{igaz} \wedge \neg l_2) \rightarrow 1 = 1 \wedge (l_2 \wedge \neg \text{igaz}) \rightarrow 1 = 2 \wedge (\text{igaz} \vee l_2) \rightarrow z_1 = z_1)]) \surd$ ($g(z_1) < g(z_2)$ állításrész $v[k+1] = z_1 \wedge \neg l_1 \wedge \neg l_2$ miatt igaz.)

3. $\neg l_1 \wedge \neg l_2 \wedge v[k+1] = z_2$
   hasonlóan

4. $\neg l_1 \wedge l_2 \wedge v[k+1] = z_1$
   $Q \wedge k \in [v.lob - 1..v.hib - 1] \wedge \forall i \in [1..2] : l_i = (\exists j \in [v.lob..k] : z_i = v[j]) \wedge \neg(l_1 \wedge l_2) \wedge (l_1 \wedge \neg l_2) \rightarrow r = 1 \wedge (l_2 \wedge \neg l_1) \rightarrow r = 2 \wedge (l_1 \vee l_2) \rightarrow rsz = z_r) \wedge z_1 = v[k+1] \wedge l_2 \wedge \neg l_1$
   $\overset{?}{\Rightarrow} lf(l_1 := igaz, Q'') = (Q \wedge k+1 \in [v.lob - 1..v.hib] \wedge igaz = (\exists j \in [v.lob..k+1] : z_1 = v[j]) \wedge l_2 = (\exists j \in [v.lob..k+1] : z_2 = v[j]) \wedge (\text{igaz} \wedge l_2) \rightarrow (r = 1 \leftrightarrow g(z_1) < g(z_2)) \wedge (\text{igaz} \wedge \neg l_2) \rightarrow r = 1 \wedge (l_2 \wedge \neg \text{igaz}) \rightarrow r = 2 \wedge (\text{igaz} \vee l_2) \rightarrow rsz = z_r) \surd$

5. $\neg l_1 \wedge l_2 \wedge v[k+1] \neq z_1$
   $Q \wedge k \in [v.lob-1..v.hib-1] \wedge \forall i \in [1..2] : l_i = (\exists j \in [v.lob..k] : z_i = v[j]) \wedge \neg(l_1 \wedge l_2) \wedge (l_1 \wedge \neg l_2) \to r = 1 \wedge (l_2 \wedge \neg l_1) \to r = 2 \wedge (l_1 \vee l_2) \to rsz = z_r) \wedge z_1 \neq v[k+1] \wedge l_2 \wedge \neg l_1$
   $\overset{?}{\Rightarrow} lf(SKIP, Q'') = (Q \wedge k+1 \in [v.lob-1..v.hib] \wedge \forall i \in [1..2] : l_i = (\exists j \in [v.lob..k+1] : z_i = v[j]) \wedge (l_1 \wedge l_2) \to (r = 1 \leftrightarrow g(z_1) < g(z_2)) \wedge (l_1 \wedge \neg l_2) \to r = 1 \wedge (l_2 \wedge \neg l_1) \to r = 2 \wedge (l_1 \vee l_2) \to rsz = z_r) \checkmark$

6. $\neg l_2 \wedge l_1 \wedge v[k+1] = z_2$
   hasonlóan, mint 4.

7. $\neg l_2 \wedge l_1 \wedge v[k+1] \neq z_2$
   hasonlóan, mint 5.

$k, l_1, l_2 := v.lob-1, \text{hamis}, \text{hamis}$

$k \neq v.hib \wedge \neg(l_1 \wedge l_2)$

| $z_1 \neq v[k+1] \wedge z_2 \neq v[k+1]$ | $\neg l_1 \wedge \neg l_2 \wedge v[k+1] = z_1$ | $\neg l_1 \wedge \neg l_2 \wedge v[k+1] = z_2$ | $\neg l_1 \wedge l_2 \wedge v[k+1] = z_1$ | $\neg l_1 \wedge l_2 \wedge v[k+1] \neq z_1$ | $\neg l_2 \wedge l_1 \wedge v[k+1] = z_2$ | $\neg l_2 \wedge l_1 \wedge v[k+1] \neq z_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $SKIP$ | $l_1, r, rsz := \text{igaz}, 1, z_1$ | $l_2, r, rsz := \text{igaz}, 2, z_2$ | $l_1 := \text{igaz}$ | $SKIP$ | $l_2 := \text{igaz}$ | $SKIP$ |

$k := k+1$