Feladat: Döntsük el, hogy a k természetes szám osztja-e az x természetes számot!

Specifikáció:
$A = \underset{x}{\mathbb{N}} \times \underset{k}{\mathbb{N}} \times \underset{l}{\mathbb{L}}$
$B = \underset{x'}{\mathbb{N}} \times \underset{k'}{\mathbb{N}}$
$Q = (x = x' \wedge k = k')$
$R = (k = k' \wedge l = k'|x')$

Vegyük észre, hogy az utófeltételbe ezúttal nem írtuk be Q-t. Ennek az az oka, hogy speciálisan most meg akarjuk engedni azt, hogy x értékét a program a futása során változtassa. Fontos, hogy az oszhatóságot természetesen az eredeti k'-re és x'-re specifikáljuk (és $k = k'$-t kikössük), különben az egyszerű $l, x, k :=$ igaz$, 1, 1$ értékadás megoldaná a feladatot. Tulajdonképpen, ha ez valakinek nem szimpatikus, akkor egy segédváltozó használatával ezt a furcsaságot megszüntetheti.

Megoldás:
Először írjunk egy olyan programot, ami csak a következő utófeltételt teljesíti: $R' = (k = k' \wedge x \leq k \wedge k|x \leftrightarrow k|x')$, azaz x értékét legalább k-ig csökkenti, úgy, hogy az oszthatóság tényén az eredeti x'-höz képest nem változtat. Ebből az R' állapotból egy egyszerű elágazással elérhetjük R állapotot, mivel ha R'-höz hozzávesszük még $x = k$-t, akkor pont $k'|x'$ állítást kapjuk, ha pedig $x \neq k$-t, akkor $\neg(k'|x')$ állítást. Azaz az előbbi esetben l-et igazra, az utóbbi esetben l-et hamisra állíthatjuk. Az egész program tehát egy szekvenciából fog állni, aminek közbülső feltétele R', és a szekvencia második programja az alábbi elágazás:

S_2

$x = k$	
$l :=$ igaz	$l :=$ hamis

Az elágazás levezetési szabályának első pontja triviálisan teljesül.

A második pont: 2. $\boxed{\forall i \in [1..n] : R' \wedge \pi_i \Rightarrow \mathrm{lf}(S_i, R)}$

1. $x = k$:
   $k = k' \wedge x = k \wedge k|x \leftrightarrow k|x' \overset{?}{\Rightarrow} k = k' \wedge \text{igaz} = k'|x' \surd$
2. $x \neq k$:
   $k = k' \wedge x < k \wedge k|x \leftrightarrow k|x' \overset{?}{\Rightarrow} k = k' \wedge \text{hamis} = k'|x' \surd$

Azaz $R' \Rightarrow lf(S_2, R)$, ami a szekvencia levezetési szabályának második pontja.

Most keressük meg azt az S_1 programot, amire $Q \Rightarrow lf(S_1, R')$ és így teljesíti a szekvencia levezetési szabályának az első pontját!

Ez a program egy ciklus lesz, a következő invariánssal:

$P = (k = k' \wedge k|x \leftrightarrow k|x')$

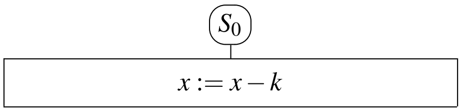
Ellenőrízzük le a ciklus feltételeit:
1. $\boxed{Q \Rightarrow P}$

Teljesül, hiszen az ekvivalencia nyíl két oldala $x = x'$ mellett ugyanaz.

2. $\boxed{P \wedge \neg\pi \Rightarrow R'}$
Ez a feltétel kezünkbe adja a ciklusfeltételt, hiszen P és R' összehosonlításából $\neg\pi$-re $x \leq k$ adódik. Tehát $\pi = (x > k)$.

3. $\boxed{P \wedge \pi \Rightarrow t > 0}$
Jelen esetben ez: $k = k' \wedge k|x \leftrightarrow k|x' \wedge x > k$. Tehát $t := x$ egy megfelelő terminálófüggvény.

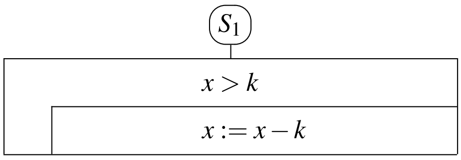
4./5. $\boxed{P \wedge \pi \wedge t = t_0 \Rightarrow \mathrm{lf}(S_0, P \wedge t < t_0)}$



S_0 valóban jó ciklusmag:

$k = k' \wedge k|x \leftrightarrow k|x' \wedge x > k \wedge t_0 = x \overset{?}{\Rightarrow} k = k' \wedge k|x - k \leftrightarrow k|x' \wedge x - k < t_0 \checkmark$

Ezzel a ciklust levezettük és így tudjuk, hogy az S_1 ciklusra: $Q \Rightarrow lf(S_1, R')$



A feladat végleges megoldása: