Feladat: Határozzuk meg — a hatványozás műveletének használata nélkül — az x szám n-edik hatványát!

Specifikáció:
$A = \underset{x}{\mathbb{Z}} \times \underset{n}{\mathbb{N}} \times \underset{r}{\mathbb{Z}} \times \underset{b}{\mathbb{Z}} \times \underset{k}{\mathbb{Z}}$
$B = \underset{x'}{\mathbb{Z}} \times \underset{n'}{\mathbb{N}}$
$Q = (x = x' \wedge n = n' \wedge n \neq 0)$
$R = (Q \wedge r = x^n)$

Megoldás:
Most keressük meg a specifikációnak megfelelő megoldó programot! A megoldást úgy sejtjük, hogy egy ciklussal találhatjuk meg. Nos, mi legyen ennek a ciklusnak az invariánsa?

$P = (Q \wedge k \in [0..n] \wedge x^n = r * b^k)$

Ellenőrízzük le a ciklus feltételeit:
1. $\boxed{Q \Rightarrow P}$

Jól láthatóan nem teljesül, sőt fordítva igaz. Ezért megpróbálunk egy olyan közbülső állapotot felírni, ami a Q-ból könnyedén (egy értékadással) elérhető és ugyanakkor ez a kívánt feltétel teljesül rá. Amennyiben ez sikerül, akkor már csak egy szekvencia közbülső feltételeként kell pillantani erre az új Q' feltételre és máris felírható lesz a kívánt program egy értékadás és egy ciklus szekvenciájaként.

$Q' = (Q \wedge k = n \wedge b = x \wedge r = 1)$

Látható, hogy $Q' \Rightarrow P$ és $Q \Rightarrow \mathrm{lf}(k, b, r := n, x, 1, Q') = Q$.

Tehát a program valahogy így néz ki:

$k, b, r := n, x, 1$
$\ldots$
$\ldots$

2. $\boxed{P \wedge \neg\pi \Rightarrow R}$
Ez a feltétel kezünkbe adja a ciklusfeltételt, hiszen P és R összehasonlításából $\neg\pi$-re $k = 0$ adódik. Tehát $\pi = (k \neq 0)$. (Megjegyzés: jelenleg $b = 1$-re is gondolhatnánk, de az nem lenne jó.)

$k, b, r := n, x, 1$
$k \neq 0$
$\ldots$

3. $\boxed{P \wedge \pi \Rightarrow t > 0}$
Jelen esetben ez: $Q \wedge k \in [1..n] \wedge x^n = r * b^k \Rightarrow t > 0$. Tehát $t := k$ egy megfelelő terminálófüggvény.
5. $\boxed{P \wedge \pi \wedge t = t_0 \Rightarrow \mathrm{lf}(S_0, t < t_0)}$

Előrevéve az utolsó feltételt már most biztosíthatjuk, hogy a programunk lefutása véges legyen. Mivel $t = k$, a megoldás csak k csökkentése lehet. Nézzük az alábbi struktogramot S_0-ként:

$2 \mid k$	
$k, b := k/2, b * b$	$k, r := k - 1, r * b$

Annak bizonyítását, hogy ez az elágazás mindig csökkenti k értékét, az olvasóra bízom.

4. $\boxed{P \wedge \pi \Rightarrow \mathrm{lf}(S_0, P)}$

Ezen állítás igazolásához az elágazás levezetési szabályának feltételeit kell ellenőríznunk:

4/1. $\boxed{P \wedge \pi \Rightarrow \left(\bigvee_{i=1}^{n} \pi_i\right)}$

A fenti formájú egyszerűsített elágazásoknál ez mindig igaz, hiszen a második feltétel igazából az első pontos negáltja, így az állapottér összes pontjában igaz kettőjük valamelyike.

4/2. $\boxed{\forall i \in [1..n] : P \wedge \pi \wedge \pi_i \Rightarrow \mathrm{lf}(S_i, P)}$

1. $2|k$:
   $Q \wedge k \in [1..n] \wedge x^n = r * b^k \wedge 2|k \overset{?}{\Rightarrow} Q \wedge k/2 \in [0..n] \wedge x^n = r * (b*b)^{k/2} \surd$
2. $\neg(2|k)$:
   $Q \wedge k \in [1..n] \wedge x^n = r * b^k \wedge \neg(2|k) \overset{?}{\Rightarrow} Q \wedge k-1 \in [0..n] \wedge x^n = r * b * b^{k-1} \surd$

Figyeljük meg, hogy ebben a feladatmegoldásban már az 5. pont megfontolásakor olyan ciklusmagot találtunk (a k növeléséhez), hogy azt már nem kellett megváltoztatnunk a 4. pont bizonyításakor, mint egyéb esetekben. (Természetesen ez nem volt véletlen.)