

Feladat: Határozzuk meg — a hatványozás műveletének használata nélkül — az x szám n -edik hatványát!

Specifikáció:

$$A = \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$$B = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$$

$$Q = (x = x' \wedge n = n' \wedge n \neq 0)$$

$$R = (Q \wedge r = x^n)$$

Megoldás:

Most keressük meg a specifikációnak megfelelő megoldó programot! A megoldást úgy sejtjük, hogy egy ciklussal találhatjuk meg. Nos, mi legyen ennek a ciklusnak az invariánsa?

$$P = (Q \wedge k \in [1..n] \wedge r = x^k)$$

Ellenőrizzük le a ciklus feltételeit:

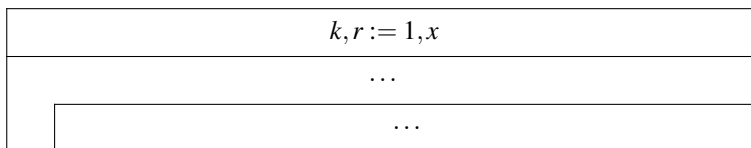
1. $Q \Rightarrow P$

Jól láthatóan nem teljesül, sőt fordítva igaz. Ezért megpróbálunk egy olyan közbülső állapotot felírni, ami a Q -ból könnyedén (egy értékadással) elérhető és ugyanakkor ez a kívánt feltétel teljesül rá. Amennyiben ez sikerül, akkor már csak egy szekvencia közbülső feltételeként kell pillantani erre az új Q' feltételre és máris felírható lesz a kívánt program egy értékadás és egy ciklus szekvenciájaként.

$$Q' = (Q \wedge k = 1 \wedge r = x)$$

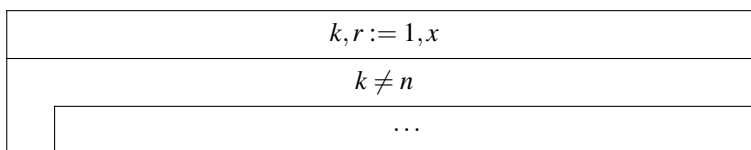
Látható, hogy $Q' \Rightarrow P$ és $Q \Rightarrow \text{If}(k, r := 1, x, Q') = Q \wedge 1 = 1 \wedge x = x \Leftrightarrow Q$.

Tehát a program valahogy így néz ki:



2. $P \wedge \neg \pi \Rightarrow R$

Ez a feltétel kezünkbe adja a ciklusfeltételt, hiszen P és R összehasonlításából $\neg \pi$ -re $k = n$ adódik. Tehát $\pi = (k \neq n)$.

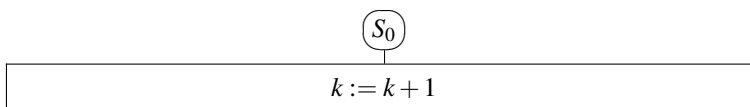


3. $P \wedge \pi \Rightarrow t > 0$

Jelen esetben ez: $Q \wedge k \in [1..n-1] \wedge r = x^k \Rightarrow t > 0$. Tehát $t := n - k$ egy megfelelő terminálófüggvény.

5. $P \wedge \pi \wedge t = t_0 \Rightarrow \text{If}(S_0, t < t_0)$

Előrevéve az utolsó feltételt már most biztosíthatjuk, hogy a programunk lefutása véges legyen. Mivel $t = n - k$ és n az invariáns szerint nem változhat, a megoldás csak k növelése lehet. Próbáljuk a feladatot úgy megoldani, hogy csak eggyel növeljük.



$$P \wedge \pi \wedge t = t_0 \Rightarrow t = t_0 \Leftrightarrow n - k = t_0 \stackrel{?}{\Rightarrow} \text{If}(S_0, n - k < t_0) = n - k - 1 < t_0 \checkmark$$

4. $P \wedge \pi \Rightarrow \text{lf}(S_0, P)$

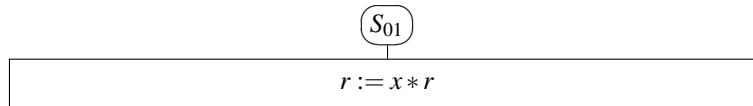
A mi esetünkben:

$$Q \wedge k \in [1..n-1] \wedge r = x^k \stackrel{?}{\Rightarrow} Q \wedge k+1 \in [1..n] \wedge r = x^{k+1} = x * x^k$$

Látható, hogy ez a feltétel nem teljesül, ha $x \neq 0$.

Azonban kiszámoltuk $\text{lf}(S_0, P)$ -t, ezt az eredményt ne hagyjuk veszni, hanem nevezzük el Q'' -nek és próbáljunk meg eljutni ide egy másik programrészlettel! Ha sikerrel járunk, akkor a szekvencia levezetési szabályát alkalmazva rögtön megkapjuk a feltételt kielégítő ciklusmagot. Fontos, hogy miközben az előbb említett részprogramot keressük, olyanok szóba sem jöhetnek, amik k értékét megváltoztatják, hiszen ezek elrontanák a már bizonyított 5. követelményt.

A megoldás természetesen egy értékadás lesz, aminek tehát a $P \wedge \pi \Rightarrow \text{lf}(S_{01}, Q'')$ követelményt kell teljesítenie.



$$Q \wedge k \in [1..n-1] \wedge r = x^k \stackrel{?}{\Rightarrow} \text{lf}(r := x * r, Q'') = Q \wedge k+1 \in [1..n] \wedge x * r = x * x^k \checkmark$$

