Feladat: Határozzuk meg — a hatványozás műveletének használata nélkül — az x szám n-edik hatványát!

Specifikáció:
$A = \underset{x}{\mathbb{Z}} \times \underset{n}{\mathbb{N}} \times \underset{r}{\mathbb{Z}} \times \underset{k}{\mathbb{Z}}$
$B = \underset{x'}{\mathbb{Z}} \times \underset{n'}{\mathbb{N}}$
$Q = (x = x' \wedge n = n' \wedge n \neq 0)$
$R = (Q \wedge r = x^n)$

Megoldás:
Most keressük meg a specifikációnak megfelelő megoldó programot! A megoldást úgy sejtjük, hogy egy ciklussal találhatjuk meg. Nos, mi legyen ennek a ciklusnak az invariánsa?

$P = (Q \wedge k \in [1..n] \wedge r = x^k)$

Ellenőrízzük le a ciklus feltételeit:
1. $\boxed{Q \Rightarrow P}$

Jól láthatóan nem teljesül, sőt fordítva igaz. Ezért megpróbálunk egy olyan közbülső állapotot felírni, ami a Q-ból könnyedén (egy értékadással) elérhető és ugyanakkor ez a kívánt feltétel teljesül rá. Amennyiben ez sikerül, akkor már csak egy szekvencia közbülső feltételeként kell pillantani erre az új Q' feltételre és máris felírható lesz a kívánt program egy értékadás és egy ciklus szekvenciájaként.

$Q' = (Q \wedge k = 1 \wedge r = x)$

Látható, hogy $Q' \Rightarrow P$ és $Q \Rightarrow \mathrm{lf}(k, r := 1, x, Q') = Q \wedge 1 = 1 \wedge x = x \Leftrightarrow Q$.

Tehát a program valahogy így néz ki:

$k, r := 1, x$
$\ldots$
$\ldots$

2. $\boxed{P \wedge \neg\pi \Rightarrow R}$
Ez a feltétel kezünkbe adja a ciklusfeltételt, hiszen P és R összehosonlításából $\neg\pi$-re $k = n$ adódik. Tehát $\pi = (k \neq n)$.

$k, r := 1, x$
$k \neq n$
$\ldots$

3. $\boxed{P \wedge \pi \Rightarrow t > 0}$
Jelen esetben ez: $Q \wedge k \in [1..n-1] \wedge r = x^k \Rightarrow t > 0$. Tehát $t := n - k$ egy megfelelő terminálófüggvény.

5. $\boxed{P \wedge \pi \wedge t = t_0 \Rightarrow \mathrm{lf}(S_0, t < t_0)}$
Előrevéve az utolsó feltételt már most biztosíthatjuk, hogy a programunk lefutása véges legyen. Mivel $t = n - k$ és n az invariáns szerint nem változhat, a megoldás csak k növelése lehet. Próbáljuk a feladatot úgy megoldani, hogy csak eggyel növeljük.

S_0

$k := k + 1$

$P \wedge \pi \wedge t = t_0 \Rightarrow t = t_0 \Leftrightarrow n - k = t_0 \overset{?}{\Rightarrow} \mathrm{lf}(S_0, n - k < t_0) = n - k - 1 < t_0 \checkmark$

4. $\boxed{P \wedge \pi \Rightarrow \mathrm{lf}(S_0, P)}$
A mi esetünkben:
$Q \wedge k \in [1..n-1] \wedge r = x^k \overset{?}{\Rightarrow} Q \wedge k+1 \in [1..n] \wedge r = x^{k+1} = x * x^k$

Látható, hogy ez a feltétel nem teljesül, ha $x \neq 0$.
Azonban kiszámoltuk $\mathrm{lf}(S_0, P)$-t, ezt az eredményt ne hagyjuk veszni, hanem nevezzük el Q''-nek és próbáljunk meg eljutni ide egy másik programrészlettel! Ha sikerrel járunk, akkor a szekvencia levezetési szabályát alkalmazva rögtön megkapjuk a feltételt kielégítő ciklusmagot. Fontos, hogy miközben az előbb említett részprogramot keressük, olyanok szóba sem jöhetnek, amik k értékét megváltoztatják, hiszen ezek elrontanák a már bizonyított 5. követelményt.

A megoldás természetesen egy értékadás lesz, aminek tehát a $P \wedge \pi \Rightarrow \mathrm{lf}(S_{01}, Q'')$ követelményt kell teljesítenie.

S_{01}

$r := x * r$

$Q \wedge k \in [1..n-1] \wedge r = x^k \overset{?}{\Rightarrow} \mathrm{lf}(r := x * r, Q'') = Q \wedge k+1 \in [1..n] \wedge x * r = x * x^k \surd$

$k, r := 1, x$	
$k \neq n$	
	$r := x * r$
	$k := k+1$