Feladat: Adott egy egész számokból álló vektor. Rendezzük a vektor elemeit (helyben) csökkenő sorrendbe!

Specifikáció:
$\mathbb{V} = \text{vect}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$
$A = \underset{x}{\mathbb{V}} \times \underset{k}{\mathbb{Z}} \times \underset{i}{\mathbb{Z}} \times \underset{j}{\mathbb{Z}} \times \underset{max}{\mathbb{Z}}$
$B = \underset{x'}{\mathbb{V}}$
$Q = (x = x')$
$R = (x = \text{perm}(x') \wedge x \text{ csökkenően rendezett})$

Definiáljuk a *csökkenően rendezett* fogalmát: x vektor adott k indexéig csökkenően rendezett, ha $(\forall i \in [x.lob..k-1] : x[i] \geq x[i+1]) \wedge (\forall i \in [k+1..x.hib] : x[k] \geq x[i])$. Továbbá x vektor csökkenően rendezett, ha x $x.hib$-ig csökkenően rendezett. A definíciókból következik, hogy x vektor csökkenően rendezett akkor is, ha x $x.hib-1$-ig csökkenően rendezett. Ezért mostantól ezt értjük ezalatt. Minden x vektor legyen definíció szerint $x.lob-1$-ig csökkenően rendezett.

Megoldás:
Most keressük meg a specifikációnak megfelelő megoldó programot! A megoldást úgy sejtjük, hogy egy ciklussal találhatjuk meg. Nos, mi legyen ennek a ciklusnak az invariánsa?

$P = (x = \text{perm}(x') \wedge k \in [x.lob-1..x.hib-1] \wedge x\ k\text{-ig csökkenően rendezett})$

Ellenőrízzük le a ciklus feltételeit:
1. $\boxed{Q \Rightarrow P}$

Jól láthatóan nem teljesül, sőt fordítva igaz. Ezért megpróbálunk egy olyan közbülső állapotot felírni, ami a Q-ból könnyedén (egy értékadással) elérhető és ugyanakkor ez a kívánt feltétel teljesül rá. Amennyiben ez sikerül, akkor már csak egy szekvencia közbülső feltételeként kell pillantani erre az új Q' feltételre és máris felírható lesz a kívánt program egy értékadás és egy ciklus szekvenciájaként.

$Q' = (Q \wedge k = x.lob-1)$

Látható, hogy $Q' \Rightarrow P$ (hiszen x $x.lob-1$-ig mindig csökkenően rendezett) és $Q \Rightarrow \text{lf}(k := x.lob-1, Q') = Q$.

Tehát a program valahogy így néz ki:

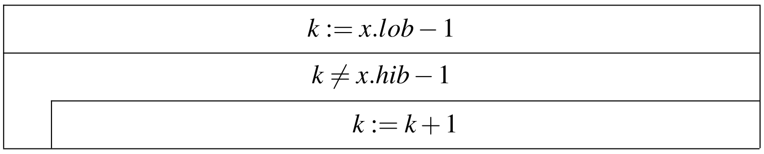
$k := x.lob-1$
$\ldots$
$\ldots$

2. $\boxed{P \wedge \neg\pi \Rightarrow R}$
Ez a feltétel adja a ciklusfeltételt, hiszen P és R összehosonlításából $\neg\pi$-re $k = x.hib-1$ adódik. Tehát $\pi = (k \neq x.hib-1)$.

$k := x.lob-1$
$k \neq x.hib-1$
$\ldots$

3. $\boxed{P \wedge \pi \Rightarrow t > 0}$
Jelen esetben ez: $(Q \wedge k \in [x.lob-1..x.hib-2] \wedge \cdots) \overset{?}{\Rightarrow} t > 0$, tehát a termináló függvény: $t := x.hib-k$. Ez a függvény $P \wedge \pi$ esetén nyilván pozitív.

5. $\boxed{P \wedge \pi \wedge t = t_0 \Rightarrow \text{lf}(S_0, t < t_0)}$
Előrevéve az utolsó feltételt már most biztosíthatjuk, hogy a programunk lefutása véges legyen.



$P \wedge \pi \wedge x.hib - k = t_0 \overset{?}{\Rightarrow} \mathrm{lf}(k := k+1, x.hib - k < t_0) = x.hib - k - 1 < t_0 \surd$

4. $\boxed{P \wedge \pi \Rightarrow \mathrm{lf}\,(S_0, P)}$
Könnyedén látható, hogy a jelenlegi ciklusmag ezt a feltételt nem teljesíti, hiszen
$\mathrm{lf}(S_0, P) = (x = \mathrm{perm}(x') \wedge k+1 \in [x.lob-1..x.hib-1] \wedge x \quad k+1$-ig csökkenően rendezett$) =: Q''$, nem következik $P \wedge \pi$-ből, mert $P \wedge \pi = (x = \mathrm{perm}(x') \wedge k \in [x.lob-1..x.hib-2] \wedge x \quad k$-ig csökkenően rendezett).

Ezért egy szekvencia második fele lesz az eddigi ciklusmag, míg az első fele pedig a
$P \wedge \pi \Rightarrow lf(S_{01}, Q'')$ feltételt kell teljesítse! S_{01}-et egy újabb szekvenciával könnyű felírni, aminek közbülső feltétele az, hogy x ugyan még csak k-ig csökkenően rendezett, de már meghatározásra került az $x[k+1..x.hib]$ részvektor maximális eleme (pontosabban annak indexe). Formálisan:
$Q''' = (x = \mathrm{perm}(x') \wedge k+1 \in [x.lob-1..x.hib-1] \wedge x \quad k$-ig csökkenően rendezett $\wedge\, i \in [k+1..x.hib] \wedge \forall j \in [k+1..x.hib]:$ $x[j] \leq x[i])$
Most vizsgáljuk meg a $\mathrm{lf}(x[k+1], x[i] := x[i], x[k+1], Q'')$ feltételt:
$x^{k+1 \leftrightarrow i} = \mathrm{perm}(x') \wedge k+1 \in [x.lob-1..x.hib-1] \wedge x^{k+1 \leftrightarrow i} \quad k+1$-ig csökkenően rendezett
Ennek a feltételnek az első két konjunkciós része nyilván következik Q'''-ből, csupán az a kérdés, hogy a harmadik résszel mi a helyzet? Természetesen $x^{k+1 \leftrightarrow i} \quad k+1$-ig csökkenően rendezett akkor és csak akkor, ha $x^{k+1 \leftrightarrow i} \quad k$-ig csökkenően rendezett és $x^{k+1 \leftrightarrow i}[k+1]$ elválasztó elem (abban az értelemben, hogy k indexig minden elem nagyobb vagy egyenlő, $k+1$ indextől minden elem kisebb vagy egyenlő vele a vektorban).
Ezt a meggondolást felhasználva Q'''-ből láthatóan következik a harmadik rész, ugyanis Q''' fennállása esetén $i \geq k+1$, azaz az, hogy $x^{k+1 \leftrightarrow i} \quad k$-ig csökkenően rendezett pontosan ugyanazt jelenti, mint az, hogy $x \quad k$-ig csökkenően rendezett, ami már Q''' része.
$x^{k+1 \leftrightarrow i}[k+1]$ pedig elválasztó elem Q''' szerint, hiszen ez pont az $x[i]$ elem a házi jelölésünk értelmében (ld. 10. feladat megoldása). De az $x[i]$ elem maximális a $k+1$ indextől kezdődő részen Q''' szerint, továbbá minden elem $k+1$ után (mivel x k-ig csökkenően rendezett) kisebb, mint a k előtti elemek, így $x[i]$ is, tehát ő elválasztó elem.
Összességében $Q''' \Rightarrow \mathrm{lf}(x[k+1], x[i] := x[i], x[k+1], Q'')$.

Már csak azt a S_{010} programot kell megtalálnunk, amivel $P \wedge \pi \Rightarrow Q'''$. Ez a maximumkereséshez nagyon hasonló (de vektorrészleten működő) program, aminek levezetése a maximumkeresés programozási tételének levezetése ismeretében triviális, ezért itt csak a stuktogramot közöljük a kész program részeként: