Feladat: Az azonos értelmezési tartományú x és y vektorop egy p jegyű ($p = x.dom$) decimális szám számjegyeit tartalmazzák (A kisebb indexeken vannak 10 magasabb hatványainak együtthatói). Képezzük a z vektorban a számok összegét, és állapítsuk meg, hogy keletkezett-e túlcsordulás!

Specifikáció:
$\mathbb{V} = \text{vect}(\mathbb{Z}, \{0, 1, \cdots, 9\})$
$A = \underset{x}{\mathbb{V}} \times \underset{y}{\mathbb{V}} \times \underset{z}{\mathbb{V}} \times \underset{k}{\mathbb{Z}} \times \underset{o}{\mathbb{L}} \times \underset{s}{\mathbb{N}_0}$
$B = \underset{x'}{\mathbb{V}} \times \underset{y'}{\mathbb{V}}$
$Q = (x = x' \wedge y = y' \wedge x.dom = y.dom = z.dom \wedge x.hib = y.hib = z.hib)$
$$R = \left(Q \wedge \sum_{i \in [x.lob..x.hib]} 10^{x.hib-i}(x[i] + y[i]) = 10^{x.dom} * \chi(o) + \sum_{i \in [x.lob..x.hib]} 10^{x.hib-i} z[i] \right)$$

Megoldás:
Most keressük meg a specifikációnak megfelelő megoldó programot! A megoldást úgy sejtjük, hogy egy ciklussal találhatjuk meg. Nos, mi legyen ennek a ciklusnak az invariánsa?

$$P = \left(Q \wedge k \in [x.lob..x.hib+1] \wedge \sum_{i \in [k..x.hib]} 10^{x.hib-i}(x[i] + y[i]) = 10^{x.hib-k+1} * \chi(o) + \sum_{i \in [k..x.hib]} 10^{x.hib-i} z[i] \right)$$

Ellenőrízzük le a ciklus feltételeit:
1. $\boxed{Q \Rightarrow P}$

Jól láthatóan nem teljesül, sőt fordítva igaz. Ezért megpróbálunk egy olyan közbülső állapotot felírni, ami a Q-ból könnyedén (egy értékadással) elérhető és ugyanakkor ez a kívánt feltétel teljesül rá. Amennyiben ez sikerül, akkor már csak egy szekvencia közbülső feltételeként kell pillantani erre az új Q' feltételre és máris felírható lesz a kívánt program egy értékadás és egy ciklus szekvenciájaként.

$Q' = (Q \wedge o = \text{hamis} \wedge k = x.hib + 1)$

Látható, hogy $Q' \Rightarrow P$ és $Q \Rightarrow \text{lf}(o, k := \text{hamis}, x.hib + 1, Q') = Q$.

Tehát a program valahogy így néz ki:

$o, k := \text{hamis}, x.hib + 1$
$\dots$
$\dots$

2. $\boxed{P \wedge \neg\pi \Rightarrow R}$
Ez a feltétel kezünkbe adja a ciklusfeltételt, hiszen P és R összehosonlításából $\neg\pi$-re $k = x.lob$ adódik. Tehát $\pi = (k \neq x.lob)$.

$o, k := \text{hamis}, x.hib + 1$
$k \neq x.lob$
$\dots$

3. $\boxed{P \wedge \pi \Rightarrow t > 0}$
$t := k - x.lob$ választással ez az állítás triviálisan teljesül.

5. $\boxed{P \wedge \pi \wedge t = t_0 \Rightarrow \text{lf}(S_0, t < t_0)}$
Előrevéve az utolsó feltételt már most biztosíthatjuk, hogy a programunk lefutása véges legyen. $S_0 := (k := k - 1)$
$P \wedge \pi \wedge k - x.lob = t_0 \overset{?}{\Rightarrow} \text{lf}(S_0, k - x.lob < t_0) = k - 1 - x.lob < t_0 \checkmark$

4. $\boxed{P \wedge \pi \Rightarrow \mathrm{lf}(S_0, P)}$

Könnyedén látható, hogy a jelenlegi ciklusmag ezt a feltételt nem teljesíti, hiszen

$\mathrm{lf}(S_0,P) = \left(Q \wedge k-1 \in [x.lob..x.hib+1] \wedge \sum_{i\in[k-1..x.hib]} 10^{x.hib-i}(x[i]+y[i]) = 10^{x.hib-k+2} * \chi(o) + \sum_{i\in[k-1..x.hib]} 10^{x.hib-i} z[i] \right)$

$=: Q''$, nem következik $P \wedge \pi$-ből.

Ezért egy szekvencia második fele lesz az eddigi ciklusmag és Q''-t kell elérni az első felében. Ehhez vezessük be a Q''' állítást a következőképpen:

$Q''' := (P \wedge \pi \wedge s = \chi(o) + x[k-1] + y[k-1]) =$

$(Q \wedge k \in [x.lob+1..x.hib+1] \wedge \sum_{i\in[k..x.hib]} 10^{x.hib-i}(x[i]+y[i]) = 10^{x.hib-k+1} * \chi(o) + \sum_{i\in[k..x.hib]} 10^{x.hib-i} z[i]$

$\wedge\ s = \chi(o) + x[k-1] + y[k-1])$

A most bevezetett új állapot az alábbi elágazással elérhető $P \wedge \pi$-ből:

o	
$s := 1 + x[k-1] + y[k-1]$	$s := x[k-1] + y[k-1]$

Hiszen:

1. $\boxed{P \wedge \pi \Rightarrow \left(\bigvee_{i=1}^{n} \pi_i \right)}$ Nyilván teljesül.

2. $\boxed{\forall i \in [1..n] : P \wedge \pi \wedge \pi_i \Rightarrow \mathrm{lf}(S_i, Q''')}$

   1. o: $P \wedge \pi \wedge o \overset{?}{\Rightarrow} P \wedge \pi \wedge 1 + x[k-1] + y[k-1] = \chi(o) + x[k-1] + y[k-1] \checkmark$
   2. $\neg o$: $P \wedge \pi \wedge \neg o \overset{?}{\Rightarrow} P \wedge \pi \wedge x[k-1] + y[k-1] = \chi(o) + x[k-1] + y[k-1] \checkmark$

Már csak a Q''' és a Q'' állapotot kell programmal összekötnünk, szerencsére ez egy értékadással megtehető:

$Q''' \overset{?}{\Rightarrow} \mathrm{lf}(o, z[k-1] := s \geq 10, s \bmod 10, Q'') = Q \wedge k-1 \in [x.lob..x.hib+1] \wedge \sum_{i\in[k-1..x.hib]} 10^{x.hib-i}(x[i]+y[i]) = 10^{x.hib-k+2} * \chi(s \geq 10) + \sum_{i\in[k..x.hib]} 10^{x.hib-i} z[i] + 10^{x.hib-k+1}(s \bmod 10)$

Itt két lehetőséget kell megkülönböztetnünk:

1. $\neg o$ (vagyis $\chi(o) = 0$): $Q \wedge k \in [x.lob+1..x.hib+1] \wedge \sum_{i\in[k..x.hib]} 10^{x.hib-i}(x[i]+y[i]) = \sum_{i\in[k..x.hib]} 10^{x.hib-i} z[i]$ $\wedge\ s = x[k-1] + y[k-1]) \overset{?}{\Rightarrow} Q \wedge k-1 \in [x.lob..x.hib+1] \wedge \sum_{i\in[k-1..x.hib]} 10^{x.hib-i}(x[i]+y[i]) = 10^{x.hib-k+2} * \chi(s \geq 10) + \sum_{i\in[k..x.hib]} 10^{x.hib-i} z[i] + 10^{x.hib-k+1}(s \bmod 10)$, azaz igaz-e, hogy $10^{x.hib-k+1}(x[k-1]+y[k-1]) = 10^{x.hib-k+2} * \chi(x[k-1]+y[k-1] \geq 10) + 10^{x.hib-k+1}(x[k-1]+y[k-1] \bmod 10)$, mivel $x[k-1]+y[k-1] \leq 18$ az állítás igaz.
2. o (vagyis $\chi(o) = 1$): hasonlóan.

Q			
	$o, k := \text{hamis}, x.hib+1$		
Q'	$k \neq x.lob$		
	o		$P \wedge \pi$
	$s := 1 + x[k-1] + y[k-1]$	$s := x[k-1] + y[k-1]$	
	$o, z[k-1] := s \geq 10, s \bmod 10$		Q'''
	$k := k-1$		Q''
R			