Feladat: Az x egész számokból álló vektor egy decimális szám számjegyeit tartalmazza helyiérték szerint csökkenő sorrendben. Állítsuk elő x-ben az eredetinél eggyel nagyobb szám ugyanilyen ábrázolását és mondjuk meg, volt-e túlcsordulás!

Feladat: Az x egész számokból álló vektor egy decimális szám számjegyeit tartalmazza helyiérték szerint csökkenő sorrendben. Állítsuk elő x-ben az eredetinél eggyel kisebb szám ugyanilyen ábrázolását és mondjuk meg, volt-e alulcsordulás!

Specifikáció:
$\mathbb{V} = \mathrm{vect}(\mathbb{Z}, [0..9])$
$A = \underset{x}{\mathbb{V}} \times \underset{y}{\{-1,1\}} \times \underset{l}{\mathbb{L}}$
$B = \underset{x'}{\mathbb{V}} \times \underset{y'}{\{-1,1\}}$
$Q = (x = x' \wedge y = y')$
$R = (y = y' \wedge f(x') + y = f(x) + y \cdot \chi(l) \cdot 10^{x.\mathrm{dom}})$, ahol
$f : \mathbb{V} \to \mathbb{N}_0,\ f(x) = \sum_{k=0}^{x.\mathrm{dom}-1} (x_{x.\mathrm{hib}-k}) \cdot 10^k$

Az f függvény arra való, hogy egy vektor számérték megadja. Amennyiben volt túlcsordulás, azt az l jelzi és így az utófelététel pont azt mondja, hogy amennyiben nem volt túlcsordulás, akkor az új x értéke az eredetinél eggyel nagyobb vagy kisebb (y függvényében). Ha volt túlcsordulás és l igaz, akkor a $\chi(l)$ értéke 1, így az utófeltétel utolsó szorzata nem 0, hanem pont korrigálja a túlcsordulást.

Tehát a két feladatot egyszerre úgy oldjuk meg, hogy az állapottér y komponense jelzi, hogy növelésről vagy csökkentésről van szó.

Megoldás:
$P = (y = y' \wedge i \in [0, x.\mathrm{dom}] \wedge f(x') + y = f(x) + y \cdot \chi(l) \cdot 10^i)$

Első ránézésre talán nem érthető, hogy ez az utófeltétel miért gyengíthető ilyen szépen invariánssá. Azonban gondoljuk meg, hogy ha az $x.\mathrm{dom}$ helyett egy kisebb (de 0-nál nagyobb) számot írunk, akkor azzal úgy tekintünk a számra a korrigáló tényezőben, mintha az eleje nem lenne a vektornak. Az f függvény pedig ugyanannyival növeli meg mind a két oldalt, amikor a vektor elejét tekinti, hiszen ahhoz még nem nyúltunk. Ha pedig az $x.\mathrm{dom}$ helyett 0-át írunk, az egy nagyon kényelmes kiinduló állapot, hiszen ekkor az l-et igazra választva az egyenlőség két oldala pontosan megegyezik.

1. $\boxed{Q \Rightarrow P}$
$Q' = (Q \wedge l = \text{igaz} \wedge i = 0)$

2. $\boxed{P \wedge \neg\pi \Rightarrow R}$
$\neg\pi = (x.\mathrm{dom} = i \vee \neg l)$, a $\neg l$ valóban diszjunkcióba vehető a triviálisan adódó $x.\mathrm{dom} = 0$-val, ugyanis ha l hamis, akkor $\chi(l)$ 0, így P és R végéből is kiesik az összeg második tényezője, a következés teljesülni fog.

3. $\boxed{P \wedge \pi \Rightarrow t > 0}$ $\quad t := x.\mathrm{dom} - i$

4./5. $\boxed{P \wedge \pi \wedge t = t_0 \Rightarrow \mathrm{lf}(S_0, P \wedge t < t_0)}$
Négy (az állapotteret együttesen teljesen lefedő) eset lehetséges:

1. $\underline{y = 1 \wedge x_{x.\mathrm{hib}-i} = 9}$, ekkor legyen az értékadás a következő: $x_{x.\mathrm{hib}-i}, i := 0, i+1$. Ez helyes, ui.
   $(P \wedge \pi \wedge t = t_0 \wedge y = 1 \wedge x_{x.\mathrm{hib}-i} = 9) =$
   $$(y = y' \wedge i \in [0, x.\mathrm{dom}-1] \wedge f(x') + 1 = \overbrace{\sum_{k=0}^{x.\mathrm{dom}-1} (x_{x.\mathrm{hib}-k}) \cdot 10^k + 10^i}^{\sum_{k=0}^{i-1}(x_{x.\mathrm{hib}-k})\cdot 10^k + 10^i + 9\cdot 10^i + \sum_{k=i+1}^{x.\mathrm{dom}-1}(x_{x.\mathrm{hib}-k})\cdot 10^k} \wedge x.\mathrm{dom} - i = t_0)$$
   $\Downarrow \checkmark$
   $\mathrm{lf}(x_{x.\mathrm{hib}-i}, i := 0, i+1, P \wedge t < t_0) =$
   $$(y = y' \wedge i+1 \in [0, x.\mathrm{dom}] \wedge f(x') + 1 = \sum_{k=0}^{i-1} (x_{x.\mathrm{hib}-k}) \cdot 10^k + 10^{i+1} + \sum_{k=i+1}^{x.\mathrm{dom}-1} (x_{x.\mathrm{hib}-k}) \cdot 10^k \wedge x.\mathrm{dom} - i - 1 < t_0)$$

2. Hasonlóan levezethető, hogy $\underline{y = 1 \wedge x_{x.\,\mathrm{hib}-i} \neq 9}$ esetben az $x_{x.\,\mathrm{hib}-i}, i, l := x_{x.\,\mathrm{hib}-i} + 1, i+1, \mathrm{hamis}$ helyes,
3. $\underline{y = -1 \wedge x_{x.\,\mathrm{hib}-i} = 0}$ esetén az $x_{x.\,\mathrm{hib}-i}, i := 9, i+1$,
4. míg $\underline{y = -1 \wedge x_{x.\,\mathrm{hib}-i} \neq 0}$ esetén az $x_{x.\,\mathrm{hib}-i}, i, l := x_{x.\,\mathrm{hib}-i} - 1, i+1, \mathrm{hamis}$.

$i, l := 0, \mathrm{igaz}$			
$x.\,\mathrm{dom} \neq i \wedge l$			
$y = 1 \wedge x_{x.\,\mathrm{hib}-i} = 9$	$y = 1 \wedge x_{x.\,\mathrm{hib}-i} \neq 9$	$y = -1 \wedge x_{x.\,\mathrm{hib}-i} = 0$	$y = -1 \wedge x_{x.\,\mathrm{hib}-i} \neq 0$
$x_{x.\,\mathrm{hib}-i}, i := 0, i+1$	$x_{x.\,\mathrm{hib}-i}, i, l := x_{x.\,\mathrm{hib}-i} + 1, i+1, \mathrm{hamis}$	$x_{x.\,\mathrm{hib}-i}, i := 9, i+1$	$x_{x.\,\mathrm{hib}-i}, i, l := x_{x.\,\mathrm{hib}-i} - 1, i+1, \mathrm{hamis}$