Feladat: Adott egy $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ függvény. Határozzuk meg, hogy a függvény melyik két pontban veszi fel a maximumát és a minimumát az $[m..n]$ intervallumon.

Specifikáció:
$A = \underset{m}{\mathbb{Z}} \times \underset{n}{\mathbb{Z}} \times \underset{k}{\mathbb{Z}} \times \underset{b}{\mathbb{Z}}$
$B = \underset{m'}{\mathbb{Z}} \times \underset{n'}{\mathbb{Z}}$
$Q = (m = m' \wedge n = n' \wedge m \leq n)$
$R = (Q \wedge b \in [m..n] \wedge k \in [m..n] \wedge \forall i \in [m..n] : f(i) \geq f(k) \wedge \forall i \in [m..n] : f(i) \leq f(b))$

A specifikációból kiolvasható, hogy nem engedjük meg az üres intervallumon való futtatást, illetve az eredményt az állapottér két változója (b és k, jelentése rendre legnagyobb, legkisebb index) szolgáltatja.

Megoldás:
Most keressük meg a specifikációnak megfelelő megoldó programot! A megoldást úgy sejtjük, hogy egy ciklussal találhatjuk meg. Nos, mi legyen ennek a ciklusnak az invariánsa (és új állapottere)?

$A' = \underset{m}{\mathbb{Z}} \times \underset{n}{\mathbb{Z}} \times \underset{k}{\mathbb{Z}} \times \underset{b}{\mathbb{Z}} \times \underset{ke}{\mathbb{Z}} \times \underset{be}{\mathbb{Z}} \times \underset{i}{\mathbb{Z}}$
$P = (Q \wedge b \in [m..n] \wedge k \in [m..n] \wedge i \in [m..n] \wedge f(k) = ke \wedge f(b) = be \wedge \forall j \in [m..i] : (f(j) \geq ke \wedge f(j) \leq be) \wedge ke \leq be)$

Ellenőrízzük le a ciklus feltételeit:
1. $\boxed{Q \Rightarrow P}$

Jól láthatóan nem teljesül, sőt fordítva igaz. Ezért megpróbálunk egy olyan közbülső állapotot felírni, ami a Q-ból könnyedén (egy értékadással) elérhető és ugyanakkor ez a kívánt feltétel teljesül rá. Amennyiben ez sikerül, akkor már csak egy szekvencia közbülső feltételeként kell pillantani erre az új Q' feltételre és máris felírható lesz a kívánt program egy értékadás és egy ciklus szekvenciájaként.

$Q' = (Q \wedge k = m \wedge b = m \wedge i = m \wedge ke = f(k) \wedge be = f(b))$

Látható, hogy $Q' \Rightarrow P$ és $Q \Rightarrow \mathrm{lf}(i,b,k,be,ke := m,m,m,f(m),f(m),Q') = Q \wedge m = m \wedge m = m \wedge m = m \wedge f(m) = f(m) \wedge f(m) = f(m) = Q$.

Tehát a program valahogy így néz ki:

$i,b,k,be,ke := m,m,m,f(m),f(m)$
$\ldots$
$\ldots$

2. $\boxed{P \wedge \neg\pi \Rightarrow R}$
Ez a feltétel kezünkbe adja a ciklusfeltételt, hiszen P és R összehosonlításából $\neg\pi$-re $i = n$ adódik. Tehát $\pi = (i \neq n)$.

$i,b,k,be,ke := m,m,m,f(m),f(m)$
$i \neq n$
$\ldots$

3. $\boxed{P \wedge \pi \Rightarrow t > 0}$
Jelen esetben ez: $Q \wedge \ldots \wedge i \in [m..n-1] \wedge \ldots \Rightarrow t > 0$. Tehát $t := n - i$ egy megfelelő terminálófüggvény.

5. $\boxed{P \wedge \pi \wedge t = t_0 \Rightarrow \mathrm{lf}(S_0, t < t_0)}$
Előrevéve az utolsó feltételt már most biztosíthatjuk, hogy a programunk lefutása véges legyen. Mivel $t = n - i$ és n az invariáns szerint nem változhat, a megoldás csak i növelése lehet. Előretekintve kis gondolkodással látható, hogy egynél többel nem érdemes növelni.

S_0

$i := i+1$

$P \wedge \pi \wedge t = t_0 \Rightarrow t = t_0 \Leftrightarrow n - i = t_0 \overset{?}{\Rightarrow} \mathrm{lf}(S_0, t < t_0) = n - i - 1 < t_0 \surd$

4. $\boxed{P \wedge \pi \Rightarrow \mathrm{lf}(S_0, P)}$

A mi esetünkben:

$(Q \wedge b \in [m..n] \wedge k \in [m..n] \wedge i \in [m..n-1] \wedge f(k) = ke \wedge f(b) = be \wedge \forall j \in [m..i] : (f(j) \geq ke \wedge f(j) \leq be) \wedge ke \leq be)$

$\overset{?}{\Rightarrow}$

$(Q \wedge b \in [m..n] \wedge k \in [m..n] \wedge i+1 \in [m..n] \wedge f(k) = ke \wedge f(b) = be \wedge \forall j \in [m..i+1] : (f(j) \geq ke \wedge f(j) \leq be) \wedge ke \leq be)$

Látható, hogy ez a feltétel nem teljesül, ha $f(i+1) < ke \vee f(i+1) > be$.

Azonban kiszámoltuk $\mathrm{lf}(S_0, P)$-t, ezt az eredményt ne hagyjuk veszni, hanem nevezzük el Q''-nek és próbáljunk meg eljutni ide egy másik programrészlettel! Ha sikerrel járunk, akkor a szekvencia levezetési szabályát alkalmazva rögtön megkapjuk a feltételt kielégítő ciklusmagot. Fontos, hogy miközben az előbb említett részprogramot keressük, olyanok szóba sem jöhetnek, amik i értékét megváltoztatják, hiszen ezek elrontanák a már bizonyított 5. követelményt.

A megoldás természetesen egy elágazás lesz, aminek tehát a $P \wedge \pi \Rightarrow \mathrm{lf}(S_{01}, Q'')$ követelményt kell teljesítenie.

S_{01}

$f(i+1) \leq ke$	$f(i+1) \geq be$	$ke \leq f(i+1) \leq be$
$k, ke := i+1, f(i+1)$	$b, be := i+1, f(i+1)$	SKIP

4/1. $\boxed{P \wedge \pi \Rightarrow \left(\bigvee_{i=1}^{n} \pi_i \right)}$

$f(i+1) \leq ke \vee f(i+1) \geq be \vee ke \leq f(i+1) \leq be \Leftrightarrow (f(i+1) \leq ke \vee f(i+1) \geq be \vee ke \leq f(i+1)) \wedge (f(i+1) \leq ke \vee f(i+1) \geq be \vee be \geq f(i+1)) \Leftrightarrow$ igaz. És igazra minden következik.

4/2. $\boxed{\forall i \in [1..n] : P \wedge \pi \wedge \pi_i \Rightarrow \mathrm{lf}(S_i, Q'')}$

1. $f(i+1) \leq ke$:
   $(Q \wedge b \in [m..n] \wedge k \in [m..n] \wedge i \in [m..n-1] \wedge f(k) = ke \wedge f(b) = be \wedge \forall j \in [m..i] : (f(j) \geq ke \wedge f(j) \leq be) \wedge ke \leq be \wedge f(i+1) \leq ke)$
   $\overset{?}{\Rightarrow}$
   $\mathrm{lf}(k, ke := i+1, f(i+1), Q'') = (Q \wedge i+1 \in [m..n] \wedge b \in [m..n] \wedge i+1 \in [m..n] \wedge f(i+1) = f(i+1) \wedge f(b) = be \wedge \underbrace{\forall j \in [m..i+1] : (f(j) \geq f(i+1) \wedge f(j) \leq be)}_{\forall j \in [m..i] : (f(j) \geq f(i+1) \wedge f(j) \leq be) \wedge f(i+1) \geq f(i+1) \wedge f(i+1) \leq be} \wedge f(i+1) \leq be$
   $\surd$
2. $f(i+1) \geq be$: HF
3. $ke \leq f(i+1) \leq be$:
   $(Q \wedge b \in [m..n] \wedge k \in [m..n] \wedge i \in [m..n-1] \wedge f(k) = ke \wedge f(b) = be \wedge \forall j \in [m..i] : (f(j) \geq ke \wedge f(j) \leq be) \wedge ke \leq be \wedge ke \leq f(i+1) \leq be)$
   $\overset{?}{\Rightarrow}$
   $\mathrm{lf}(SKIP, Q'') = (Q \wedge k \in [m..n] \wedge b \in [m..n] \wedge i+1 \in [m..n] \wedge f(k) = ke) \wedge f(b) = be \wedge \underbrace{\forall j \in [m..i+1] : (f(j) \geq ke \wedge f(j) \leq be)}_{\forall j \in [m..i] : (f(j) \geq ke \wedge f(j) \leq be) \wedge ke \leq f(i+1) \wedge f(i+1) \leq be} \wedge ke \leq be$
   $\surd$

<table>
<tr><td colspan="4">$i, b, k, be, ke := m, m, m, f(m), f(m)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$i \neq n$</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td>$f(i+1) \leq ke$</td><td>$f(i+1) \geq be$</td><td>$ke \leq f(i+1) \leq be$</td></tr>
<tr><td>$k, ke := i+1, f(i+1)$</td><td>$b, be := i+1, f(i+1)$</td><td>SKIP</td></tr>
<tr><td colspan="3">$i := i+1$</td></tr>
</table>