4.

A típus

Az állapottér definíciójában szereplő halmazokat típusértékhalmazoknak neveztük, és csak annyit mondtunk róluk, hogy legfeljebb megszámlálhatóak.

A továbbiakban arról lesz szó, hogy ezek a halmazok hogyan jönnek létre, milyen közös tulajdonság jellemző az elemeikre.

4.1. A típusspecifikáció

Először bevezetünk egy olyan fogalmat, amit arra használhatunk, hogy pontosan leírjuk a követelményeinket egy típusértékhalmazzal, és a rajta végezhető műveletekkel szemben.

---

12. DEFINÍCIÓ: TÍPUSSPECIFIKÁCIÓ

A $\mathcal{T}_s = (T, I_s, \mathbb{F})$ hármast *típusspecifikációnak* nevezzük, ha teljesülnek rá a következő feltételek:

1. T: tetszőleges alaphalmaz,
2. $I_s : T \to \mathbb{L}$ specifikációs invariáns,
   $T_s = \lceil I_s \rceil$ a típusértékhalmaz,
3. $\mathbb{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$, ahol $\forall i \in [1..n] : F_i \subseteq A_i \times A_i$, amelyre
   $A_i = A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_{n_i}}$ úgy, hogy $\exists j \in [1..n_i] : A_{i_j} = T$ és
   $\forall j \in [1..n_i] : (A_{i_j} = T) \Rightarrow pr_{A_{i_j}}(F_i) \subseteq T_s \times T_s$.

Vegyük észre, hogy az alaphalmaz és az invariáns tulajdonság segítségével azt fogalmazzuk meg, hogy mi az az értékhalmaz, aminek elemeivel foglalkozni akarunk, míg a feladatok halmazával azt írjuk le, hogy ezekre az elemekre milyen műveletek végezhetők el.

Az állapottér definíciójában szereplő típusértékhalmazok mind ilyen típusspecifikációban vannak definiálva. Az állapottér egy komponensét egy program csak a típusműveleteken keresztül változtathatja meg.

4.2. A típus

Vizsgáljuk meg, hogy a típusspecifikációban leírt követelményeket hogyan valósítjuk meg. Ehhez bevezetjük az elemi típusértékek halmazát, amit E-vel jelölünk.

---

13. DEFINÍCIÓ: TÍPUS

A $\mathcal{T} = (\varrho, I, \mathbb{S})$ hármast *típusnak* nevezzük, ha az alábbi feltételek teljesülnek rá:

1. $\varrho \subseteq E^* \times T$, reprezentációs függvény,
2. $I : E^* \to \mathbb{L}$, típusinvariáns tulajdonság,
3. $\mathbb{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$, ahol
   $\forall i \in [1..m] : S_i \subseteq B_i \times B_i^{**}$ program, amelyre $B_i = B_{i_1} \times \cdots \times B_{i_{m_i}}$ úgy, hogy $\exists j \in [1..m_i] : B_{i_j} = E^*$ és $\nexists j \in [1..m_i] : B_{i_j} = T$.

A típus első két komponense az absztrakt adattípus reprezentációját írja le, míg a programhalmaz a típusműveletek implementációját tartalmazza.

Meg kell még vizsgálnunk azt a kérdést, hogy mikor mondjuk, hogy egy típus megfelel a típusspecifikációnak, azaz a típus mikor teljesíti a specifikációban leírt követelményeket.

---

14. DEFINÍCIÓ: MEGFELELTETÉS

Egy $\mathcal{T} = (\varrho, I, \mathbb{S})$ típus *megfelel* a $\mathcal{T}_s = (T, I_s, \mathbb{F})$ típusspecifikációnak, ha

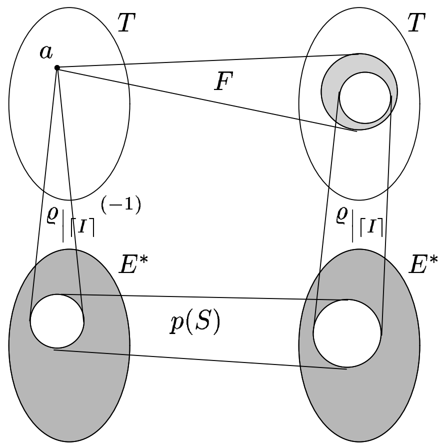
1. $\varrho([I]) = T_s$,
2. $\forall F \in \mathbb{F} : \exists S \in \mathbb{S} : S$ a ϱ-n keresztül megoldja F-et.

Természetesen a megfelelés definíciója még nem teljes, meg kell még mondanunk, hogy mit értünk a ϱ-n keresztüli megoldáson. Ehhez először vizsgáljunk meg egy egyszerű esetet: tegyük fel, hogy a feladat és a program állapottere egykomponensű.

Persze a fenti definíciók figyelembe vételével ez azt jelenti, hogy a feladat állapottere T, a programé pedig E^*. Ekkor tulajdonképpen a ϱ-n keresztüli megoldást úgy kell elképzelni, mintha a megoldás definíciójában a programfüggvény $\varrho|_{\lceil I \rceil} \odot p(S) \odot \varrho|_{\lceil I \rceil}{}^{(-1)}$ reláció lenne, azaz

1. $\mathcal{D}_F \subseteq \mathcal{D}_{\varrho|_{\lceil I \rceil} \odot p(S) \odot \varrho|_{\lceil I \rceil}{}^{(-1)}}$, és

2. $\forall a \in \mathcal{D}_F : \varrho_{|\lceil I \rceil} \odot p(S) \odot \varrho_{|\lceil I \rceil}^{(-1)}(a) \subseteq F(a)$.



4.1. ábra. A ϱ-n keresztüli megoldás egykomponensű állapotterek között

Legyen a továbbiakban $S \in \mathbb{S}$, és $F \in \mathbb{F}$, $F \subseteq A \times A$, $A = A_1 \times \cdots \times A_n$, $S \subseteq B \times B^{**}$, $B = B_1 \times \cdots \times B_n$. Azt mondjuk, hogy az B állapottér *illeszkedik* az A állapottérhez, ha

$$\forall i \in [1..n] : B_i = \begin{cases} E^*, & \text{ha } A_i = T \\ A_i, & \text{különben} \end{cases}$$

A fenti esetben legyen a $\gamma \subseteq B \times A$ leképezés az alábbi módon definiálva:

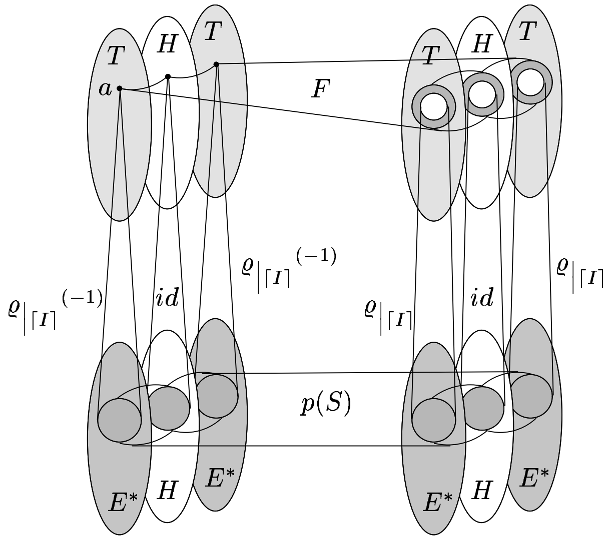
$$\forall b \in B : \gamma(b) = \gamma_1(b_1) \times \gamma_2(b_2) \times \dots \gamma_n(b_n)$$

ahol $\forall i \in [1..n] : \gamma_i \subseteq B_i \times A_i$, és

$$\gamma_i = \begin{cases} \varrho_{|\lceil I \rceil}, & \text{ha } A_i = T \\ id_{A_i}, & \text{különben} \end{cases}$$

A továbbiakban az ilyen felépítésű γ relációt $\gamma = (\gamma_1; \gamma_2; \dots; \gamma_n)$-nel fogjuk jelölni. Vegyük észre, hogy a γ tulajdonképpen a ϱ egyfajta kiterjesztése több komponensű, de egymáshoz illeszkedő állapotterek esetén. Ezek után a megoldás definícióját felírhatjuk az ilyen esetre úgy, hogy az előző megoldásdefinícióban $\varrho_{|\lceil I \rceil}$ helyére γ-t írunk.

Most már csak egy kis lépés van hátra az általános eset leírásához: ha a program és a feladat állapottere nem illeszkedik egymáshoz, akkor tegyük illeszkedővé őket. Ez a kiterjesztés fogalmának felhasználásával könnyen megtehető.



4.2. ábra. A ϱ-n keresztüli megoldás illeszkedő állapotterek között

15. DEFINÍCIÓ: MEGOLDÁS ϱ-N KERESZTÜL

Azt mondjuk, hogy az $S \subseteq B \times B^{**}$ program a ϱ-n keresztül *megoldja* az $F \subseteq A \times A$ feladatot, ha vannak olyan C és D illeszkedő terek, hogy A altere C-nek, B altere D-nek, és

1. $\mathcal{D}_{F'} \subseteq \mathcal{D}_{\gamma \odot p(S') \odot \gamma^{(-1)}}$, és
2. $\forall a \in \mathcal{D}_{F'} : \gamma \odot p(S') \odot \gamma^{(-1)}(a) \subseteq F'(a)$,

ahol $\gamma \subseteq D \times C$ a fenti értelemben definiált leképezés, S' az S kiterjesztése D-re, F' pedig az F kiterjesztése C-re.

Természetesen egy típusspecifikációnak több különböző típus is megfelelhet. Ekkor az, hogy melyiket választjuk a reprezentáció és a műveletek implementációinak más további tulajdonságaitól – ilyen például a reprezentáció memóriaigénye, vagy az implementációk műveletigénye – függ. Ez a döntés mindig a megoldandó programozási feladat függvénye.

4.3. Példák

1. példa: A típusértékek halmaza legyen a magyar abc magánhangzói! { a, á, e, é, i, í, o, ó, ö, ő, u, ú, ü, ű }. Szeretnénk tudni, hogy egy adott magánhangzónak melyik a (rövid ill. hosszú) párja. Legyen egy olyan típusműveletünk, amely erre a kérdésre választ tud adni. Az elemi típusértékek halmaza legyen a { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 } halmaz! Add meg a típusspecifikációt és készíts el egy olyan típust, ami megfelel a specifikációnak!

Megoldás: Írjuk fel először a típusspecifikációt! Legyen a magánhangzók halmaza MGH. Ekkor

$\mathcal{T}_s = (MGH, < igaz >, \{F\})$, ahol $F \subseteq MGH \times MGH$,

$F =$ { (a, á), (á, a), (e, é), (é, e), (i, í), (í, i), (o, ó), (ó, o), (ö, ő), (ő, ö), (u, ú), (ú, u), (ü, ű), (ű, ü) }

Adjuk meg a típust!

$\mathcal{T} = (\varrho, I, \{S\})$, ahol $\varrho \subseteq E^* \times MGH$,

$\varrho =$ { ($< 0 >$, a), ($< 14 >$, á), ($< 1 >$, e), ($< 13 >$, é), ($< 2 >$, i), ($< 12 >$, í), ($< 3 >$, o), ($< 11 >$, ó), ($< 4 >$, ö), ($< 10 >$, ő), ($< 5 >$, u), ($< 9 >$, ú), ($< 6 >$, ü), ($< 8 >$, ű) }

$\forall \alpha \in E^*$:

$$I(\alpha) = (|\alpha| = 1 \wedge \alpha_1 \neq 7)$$

$S \subseteq E^* \times (E^*)^*$,

$$\begin{aligned} S &= \{(\langle i \rangle, \langle \langle i \rangle, \langle 14 - i \rangle \rangle) \mid i \in E\} \cup \\ &\cup \{(\alpha, < \alpha, \alpha, \cdots >) \mid |\alpha| \neq 1\} \end{aligned}$$

Az, hogy a most megadott típus megfelel a fenti típusspecifikációnak, könnyen látható: a reprezentáció helyessége a ϱ és az I definíciójából leolvasható, míg az, hogy az S program a ϱ-n keresztül megoldja az F feladatot, a program egyszerű hozzárendeléséből és a ϱ “trükkös" megválasztásából látszik.

Természetesen másmilyen reprezentációs függvényt is meg lehet adni, de ekkor meg kell változtatnunk a típusinvarinánst és a programot is.

2. példa: Specifikáld azt a típust, melynek értékei a $[0..127]$ halmaz részhalmazai, típusműveletei pedig két részhalmaz metszetének ill. uniójának képzése, ill. annak megállapítása, hogy egy elem eleme-e egy részhalmaznak. Adj meg egy típust, amely megfelel a specifikációnak! (Az elemi értékek halmaza: $\{0, 1\}$, a programokat elég a programfüggvényükkel megadni.)

Megoldás: $\mathcal{T}_s = (T, I_s, \mathbb{F})$, ahol

$$\begin{aligned} T &= 2^{[0..127]}, \\ I_s &= < igaz >, \\ \mathbb{F} &= \{F_m, F_u, F_e\}, \end{aligned}$$

és $A_m = T \times T \times T, F_m \subseteq A_m \times A_m$,

$$F_m = \{((a, b, c), (p, q, r)) \mid p = a \wedge q = b \wedge r = a \cap b\}$$

$A_u = T \times T \times T, F_u \subseteq A_u \times A_u$

$$F_u = \{((a, b, c), (p, q, r)) \mid p = a \wedge q = b \wedge r = a \cup b\}$$

$A_e = T \times [0..127] \times \mathbb{L}, F_e \subseteq A_e \times A_e$

$$F_e = \{((h,e,l),(h',e',l')) \mid h = h' \wedge e = e' \wedge l' = (e \in h)\}$$

Adjunk a fenti specifikációnak megfelelő típust! $\mathcal{T} = (\varrho, I, \mathbb{S})$, és $\varrho \subseteq E^* \times 2^{\mathbb{N}}$, $\forall \alpha \in E^*$:

$$\varrho(\alpha) = \{\{i \mid \alpha_{i+1} = 1\}\},$$

$I : E^* \to \mathbb{L}, \forall \alpha \in E^*$:

$$I(\alpha) = (|\alpha| = 128),$$

$\mathbb{S} = \{S_m, S_u, S_e\}$, és $B_m = E^* \times E^* \times E^*,\ S_m \subseteq B_m \times B_m$ program

$$p(S_m) = \{((\alpha,\beta,\gamma),(\alpha',\beta',\gamma')) \quad | \quad I(\alpha) \wedge I(\beta) \wedge I(\gamma') \wedge \alpha = \alpha' \wedge \beta = \beta' \wedge \\ \forall i \in [1..128] : \gamma'_i = \alpha_i * \beta_i\}$$

$B_u = E^* \times E^* \times E^*,\ S_u \subseteq B_u \times B_u$ program

$$p(S_u) = \{((\alpha,\beta,\gamma),(\alpha',\beta',\gamma')) \quad | \quad I(\alpha) \wedge I(\beta) \wedge I(\gamma') \wedge \alpha = \alpha' \wedge \beta = \beta' \wedge \\ \forall i \in [1..128] : \gamma'_i = \alpha_i + \beta_i - \alpha_i * \beta_i\}$$

$B_e = E^* \times [0..127] \times \mathbb{L},\ S_e \subseteq B_e \times B_e$ program

$$p(S_e) = \{((\alpha,x,l),(\alpha',x',l')) \mid I(\alpha) \wedge \alpha = \alpha' \wedge x = x' \wedge l' = (\alpha_{x+1} = 1)\}$$

Vajon megfelel a most leírt típus a fenti típusspecifikációnak? A reprezentáció helyes, ugyanis a pontosan 128 hosszú sorozatokat a reprezentációs függvény éppen a kívánt részhalmazokba képezi le, azaz

$$\varrho([I]) = [I_s]$$

Vizsgáljuk meg a programok és a feladatok viszonyát. Vegyük észre, hogy a programok állapotterei illeszkednek a megfelelő feladat állapotteréhez, tehát felírható közöttük a γ reláció.

$$\begin{aligned}
\gamma_m &= (\varrho|_{\lceil I \rceil}; \varrho|_{\lceil I \rceil}; \varrho|_{\lceil I \rceil}),\\
\gamma_u &= (\varrho|_{\lceil I \rceil}; \varrho|_{\lceil I \rceil}; \varrho|_{\lceil I \rceil}),\\
\gamma_e &= (\varrho|_{\lceil I \rceil}; id_{[0..127]}; id_{\mathbb{L}})
\end{aligned}$$

Ezek felhasználásával a ϱ-n keresztüli megoldás egyszerűen adódik a reprezentációs függvény és a programfüggvények szemantikájából.

3. példa: Legyen $\mathcal{T}_s = (T, I_s, \mathbb{F})$ egy típusspecifikáció, $\mathbb{F} = \{F\}$. Legyenek $\mathcal{T}_1 = (\varrho_1, I_1, \mathbb{S}_1)$ és $\mathcal{T}_2 = (\varrho_2, I_2, \mathbb{S}_2)$ típusok, melyekre: $\mathbb{S}_1 = \{S_1\}, \mathbb{S}_2 = \{S_2\}, \varrho_1 = \varrho_2, [I_1] = [I_2]$, és $S_2 \subseteq S_1$.
Igaz-e, hogy ha $\mathcal{T}_1$ megfelel $\mathcal{T}_s$-nek, akkor $\mathcal{T}_2$ is?

Megoldás: A reprezentáció helyessége $\varrho_1 = \varrho_2$ és $[I_1] = [I_2]$ miatt triviálisan teljesül, hiszen ekkor:

$$\varrho_2([I_2]) = \varrho_1([I_1]) = [I_s].$$

Azt kell tehát megvizsgálnunk, hogy vajon az S_2 program megoldja-e az F feladatot a ϱ_2-n keresztül. Mivel a programok állapottere közös, feltehetjük, hogy a programok állapottere és a feladat állapottere egymásnak megfeleltethető, hiszen ellenkező esetben mindkét megoldás-vizsgálatnál a feladatnak ugyanazt a kiterjesztését kellene használnunk, és így az eredeti feladatot ezzel a kiterjesztéssel helyettesítve az alábbi gondolatmenet végigvihető.

Mivel $S_2 \subseteq S_1$, a két program programfüggvényére teljesül a következő:

$i.$ $\mathcal{D}_{p(S_1)} \subseteq \mathcal{D}_{p(S_2)}$,

$ii.$ $\forall a \in \mathcal{D}_{p(S_1)} : p(S_2)(a) \subseteq p(S_1)(a)$.

Jelöljük most is γ-val a program és a feladat állapottere közötti, a megfeleltetésben definiált leképezést. Könnyen látható, hogy az $i.$ tulajdonság miatt

$$\mathcal{D}_{\gamma \odot p(S_1) \odot \gamma^{(-1)}} \subseteq \mathcal{D}_{\gamma \odot p(S_2) \odot \gamma^{(-1)}}.$$

Másrészt mivel az S_1 program megoldja F-et a ϱ-n keresztül

$$\mathcal{D}_F \subseteq \mathcal{D}_{\gamma \odot p(S_1) \odot \gamma^{(-1)}}$$

is teljesül. A fenti két állítás alapján

$$\mathcal{D}_F \subseteq \mathcal{D}_{\gamma \odot p(S_2) \odot \gamma^{(-1)}}.$$

Használjuk fel a második tulajdonságot is! Az $ii.$ tulajdonság miatt igaz az alábbi állítás is:

$$\forall a \in \mathcal{D}_{\gamma \odot p(S_1) \odot \gamma^{(-1)}} : \gamma \odot p(S_2) \odot \gamma^{(-1)}(a) \subseteq \gamma \odot p(S_1) \odot \gamma^{(-1)}(a).$$

Ekkor viszont mivel az S_1 program – a ϱ-n keresztül – megoldása a feladatnak, teljesül, hogy

$$\forall a \in \mathcal{D}_F : \gamma \odot p(S_1) \odot \gamma^{(-1)}(a) \subseteq F(a),$$

és ezért

$$\forall a \in \mathcal{D}_F : \gamma \odot p(S_2) \odot \gamma^{(-1)}(a) \subseteq F(a),$$

azaz az S_2 program is megoldja az F feladatot a ϱ-n keresztül, tehát a $\mathcal{T}_2$ típus is megfelel a specifikációnak.

4.4. Feladatok

1. Adjunk típusspecifikációt, reprezentációs függvényt, típust (ami megfelel a specifikációnak) a következő típusra: a lehetséges értékek: $[0..99999]$. A műveletek a következő és az előző 100000 szerinti maradékkal. Az elemi értékek a decimális számjegyek $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Mutasd meg, hogy a típus megfelel a típusspecifikációnak!

2. $E = \{0, 1, 2\}, T_s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}, \mathbb{F} = \{F\}$.

   $$F = \{((a, b, c), (d, e, f)) \mid \exists k \in \mathbb{Z} : f + k * 10 = a + b\}$$

   Készíts el egy olyan típust, ami megfelel a specifikációnak!

3. Legyen $\mathcal{T}_{s1} = (T, I_{s1}, \mathbb{F}_1), \mathcal{T}_{s2} = (T, I_{s2}, \mathbb{F}_2)$ két típusspecifikáció!

   1. állítás: Minden $\mathcal{T}$ típusra: $\mathcal{T}$ megfelel $\mathcal{T}_{s1}$-nek $\Leftrightarrow$ $\mathcal{T}$ megfelel $\mathcal{T}_{s2}$-nek.
   2. állítás: $[I_{s1}] = [I_{s2}]$ és $\mathbb{F}_1 = \mathbb{F}_2$.

   Ekvivalens-e a két állítás?

4. Adott a $\mathcal{T}_s = (T, I_s, \mathbb{F})$ típusspecifikáció, továbbá adottak a $\mathcal{T}_1 = (\varrho_1, I_1, \mathbb{S}_1)$, $\mathcal{T}_2 = (\varrho_2, I_2, \mathbb{S}_2)$ típusok. Tegyük fel, hogy $[I_1] = [I_2], \mathbb{S}_1 = \mathbb{S}_2$ és $\varrho_1([I_1]) = \varrho_2([I_2])$ és $\forall \alpha \in E^* : \ \varrho_2(\alpha) \subseteq \varrho_1(\alpha)$, valamint $\mathcal{T}_1$ feleljen meg $\mathcal{T}_s$-nek!

   Igaz-e, hogy $\mathcal{T}_2$ is megfelel $\mathcal{T}_s$-nek?

5. Legyen $\mathcal{T}_s = (T, I_s, \mathbb{F})$ egy típusspecifikáció, $\mathcal{T}_1 = (\varrho_1, I_1, \mathbb{S}_1), \mathcal{T}_2 = (\varrho_2, I_2, \mathbb{S}_2)$. Legyen $[I_2] \subseteq [I_1], \mathbb{S}_1 = \mathbb{S}_2$ és $\varrho_1([I_1]) = \varrho_2([I_2])$, és $\forall \alpha \in E^* : \ \varrho_2(\alpha) = \varrho_1(\alpha)$, valamint $\mathcal{T}_1$ feleljen meg $\mathcal{T}_s$-nek!

   Igaz-e, hogy $\mathcal{T}_2$ is megfelel $\mathcal{T}_s$-nek?