5.

Specifikáció

A megoldás definíciója közvetlenül elég nehézkesen használható a programok készítése során, hiszen az, hogy egy program megold-e egy feladatot az a megoldás eddigi definíciója alapján csak nehezen ellenőrizhető. Ezért bevezetünk néhány új fogalmat, majd ezek segítségével egy elégséges feltételt adunk a megoldásra.

5.1. A leggyengébb előfeltétel

Először a program futásának adjuk meg egy a programfüggvénynél kényelmesebben használható jellemzését.

16. DEFINÍCIÓ: LEGGYENGÉBB ELŐFELTÉTEL
Legyen $S \subseteq A \times A^{**}$ program, $R : A \to \mathbb{L}$ állítás. Ekkor az S program R utófeltételhez tartozó *leggyengébb előfeltétele* az az állítás, amelyre:

$$\lceil lf(S,R) \rceil = \{a \in \mathcal{D}_{p(S)} | p(s)(a) \subseteq \lceil R \rceil\}.$$

A leggyengébb előfeltétel tehát pontosan azokban a pontokban igaz, ahonnét kiindulva az S program biztosan terminál, és az összes lehetséges végállapotra igaz R.

Természetesen a leggyengébb előfeltétel igazsághalmazán kívül is lehetnek olyan pontok, amelyből a program egy futása eljut az utófeltétel igazsághalmazába, csak azokból a pontokból nem garantált, hogy oda jut.

Egy program működése úgy is jellemzhető, hogy megadjuk a program tetszőleges utófeltételhez tartozó leggyengébb előfeltételét. A feladat megoldása során az a célunk, hogy olyan programot találjunk, amelyik bizonyos feltételeknek eleget tevő pontokban terminál. Ezért azt mondhatjuk, hogy ha a számunkra kedvező végállapotokra megadjuk a program leggyengébb előfeltételét, akkor a programfüggvény meghatározása nélkül jellemezzük a program működését.

A most következő tétel a leggyengébb előfeltétel néhány fontos tulajdonságát mondja ki.

3. TÉTEL: A lf TULAJDONSÁGAI

Legyen $S \subseteq A \times A^{**}$ program, $Q, R : A \to \mathbb{L}$ állítások. Ekkor

(1) $lf(S, HAMIS) = HAMIS$,

(2) Ha $Q \Rightarrow R$, akkor $lf(S,Q) \Rightarrow lf(S,R)$,

(3) $lf(S,Q) \wedge lf(S,R) = lf(S, Q \wedge R)$,

(4) $lf(S,Q) \vee lf(S,R) \Rightarrow lf(S, Q \vee R)$.

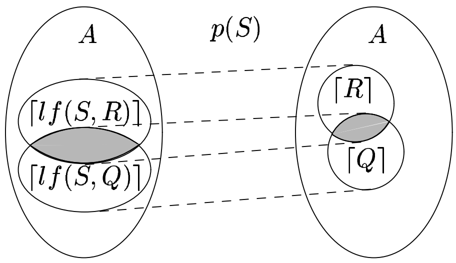
Az első tulajdonságot a csoda kizárása elvének, a másodikat monotonitási tulajdonságnak nevezzük.

Bizonyítás:

1. Indirekt: Tegyük fel, hogy $\exists a \in \lceil lf(S, HAMIS) \rceil$. Ekkor a leggyengébb előfeltétel definíciója szerint: $a \in \mathcal{D}_{p(S)}$ és $p(S)(a) \subseteq \lceil HAMIS \rceil = \emptyset$. Ez nyilvánvaló ellentmondás.

2. Indirekt: Tegyük fel, hogy $\exists a \in \lceil lf(S,Q) \rceil \setminus \lceil lf(S,R) \rceil$. Ekkor $a \in \mathcal{D}_{p(S)}$ és $p(S)(a) \subseteq \lceil Q \rceil \wedge p(S)(a) \not\subseteq \lceil R \rceil$. Ez viszont ellentmond annak a feltételnek, mely szerint $\lceil Q \rceil \subseteq \lceil R \rceil$

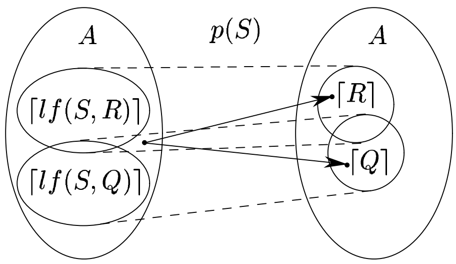
3. Az állítást két részben, a mindkét irányú következés belátásával bizonyítjuk.



5.1. ábra. A leggyengébb előfeltétel és a metszet kapcsolata

(a) $lf(S,Q) \wedge lf(S,R) \Rightarrow lf(S, Q \wedge R)$, ui.:
Legyen $a \in \lceil lf(S,Q) \wedge lf(S,R) \rceil$. Ekkor $a \in \lceil lf(S,Q) \rceil$ és $a \in \lceil lf(S,R) \rceil$, azaz $a \in \mathcal{D}_{p(S)}$ és $p(S)(a) \subseteq \lceil Q \rceil$, illetve $p(S)(a) \subseteq \lceil R \rceil$. Ekkor azonban $p(S)(a) \subseteq \lceil Q \rceil \cap \lceil R \rceil = \lceil Q \wedge R \rceil$, azaz $a \in \lceil lf(S, Q \wedge R) \rceil$.

(b) $lf(S, Q \wedge R) \Rightarrow lf(S,Q) \wedge lf(S,R)$, ui.:
Legyen $a \in \lceil lf(S, Q \wedge R)\rceil$. Ekkor a leggyengébb előfeltétel definíciója alapján $a \in \mathcal{D}_{p(S)}$ és $p(S)(a) \subseteq \lceil Q \wedge R\rceil$. Felhasználva, hogy $\lceil Q \wedge R\rceil = \lceil Q\rceil \cap \lceil R\rceil$, adódik, hogy $p(S)(a) \subseteq \lceil Q\rceil$ és $p(S)(a) \subseteq \lceil R\rceil$, azaz $a \in \lceil lf(S,Q)\rceil$ és $a \in \lceil lf(S,R)\rceil$, tehát $a \in \lceil lf(S,Q) \wedge lf(S,R)\rceil$.



5.2. ábra. A leggyengébb előfeltétel és az unió kapcsolata

4. Legyen $a \in \lceil lf(S,Q) \vee lf(S,R)\rceil$. Ekkor $a \in \lceil lf(S,Q)\rceil$ vagy $a \in \lceil lf(S,R)\rceil$. Ha $a \in \lceil lf(S,Q)\rceil$, akkor – a monotonitási tulajdonság alapján – $a \in \lceil lf(S, Q \vee R)\rceil$. Hasonlóan ha $a \in \lceil lf(S,Q)\rceil$, akkor $a \in \lceil lf(S, Q \vee R)\rceil$.

□

5.2. A feladat specifikációja

A következőkben bevezetjük a feladat megadásának egy másik módját, és kimondunk egy a gyakorlat szempontjából nagyon fontos tételt.

Általában a feladat nem függ az állapottér összes komponensétől, azaz az állapottér több pontjához is ugyanazt rendeli. Ezeket a pontokat fogjuk össze egy ponttá a paramétertér segítségével.

17. DEFINÍCIÓ: PARAMÉTERTÉR
Legyen $F \subseteq A \times A$ feladat. A B halmazt a feladat *paraméterterének* nevezzük, ha van olyan F_1 és F_2 reláció, hogy

$$\begin{aligned} F_1 &\subseteq A \times B, \\ F_2 &\subseteq B \times A, \\ F &= F_2 \circ F_1. \end{aligned}$$

Fontos észrevenni, hogy paraméterteret mindig lehet találni. Például maga a feladat állapottere minden esetben választható paramétertérnek úgy, hogy a definícióban szereplő F_1 relációnak az identikus leképezést, F_2-nek pedig magát az F feladatot választjuk. Ám az, hogy egy konkrét esetben mit is választunk paramétertérnek a feladattól függ. Általában úgy választjuk meg a paraméterteret, hogy a következő tételt kényelmesen tudjuk használni.

4. TÉTEL: SPECIFIKÁCIÓ TÉTELE
Legyen $F \subseteq A \times A$ feladat, B az F egy paramétertere, $F_1 \subseteq A \times B$, $F_2 \subseteq B \times A$, $F = F_2 \circ F_1$. Legyen $b \in B$, és definiáljuk a következő állításokat:

$$\begin{aligned} \lceil Q_b \rceil &= \{a \in A \mid (a, b) \in F_1\} = F_1^{(-1)}(b) \\ \lceil R_b \rceil &= \{a \in A \mid (b, a) \in F_2\} = F_2(b). \end{aligned}$$

Ekkor ha $\forall b \in B : Q_b \Rightarrow lf(S, R_b)$, akkor az S program megoldja az F feladatot.

Bizonyítás: A megoldás definíciója két pontjának teljesülését kell belátnunk:

1. $\mathcal{D}_F \subseteq \mathcal{D}_{p(S)}$, ui.

   Legyen $a \in \mathcal{D}_F$ tetszőleges. Ekkor az F_1 és F_2 relációk definíciója miatt

   $$\exists b \in B : a \in \lceil Q_b \rceil.$$

   De ekkor a tétel feltétele alapján:

   $$a \in \lceil Q_b \rceil \subseteq \lceil lf(S, R_b) \rceil \subseteq \mathcal{D}_{p(S)}.$$

2. $\forall a \in \mathcal{D}_F : p(S)(a) \subseteq F(a)$, ui.

   Legyen $a \in \mathcal{D}_F$ tetszőlegesen rögzített, $b \in B$ olyan, amelyre $a \in \lceil Q_b \rceil$. Ekkor a feltétel szerint:

   $$p(S)(a) \subseteq \lceil R_b \rceil = F_2(b) \subseteq F_2(F_1(a)) = F(a).$$

□

Vegyük észre, hogy a tétel feltételrendszerében használt jelölések felhasználhatók a feladat egy más módon történő leírására. Ha a feldatot úgy definiáljuk, hogy megadjuk az állapotterét (A), a paraméterterét (B), valamint az elő- és utófeltételét (Q illetve R) a paramétertér egy tetszőleges pontjára, akkor azt mondjuk, hogy a feladatot specifikáljuk.

Paramétertérnek általában az állapottér egy alterét szoktuk választani. Azokat a komponenseket válogatjuk ki, amelyek értékétől függ, hogy a feladat mit rendel, amik *paraméterezik* a feladatot.

A specifikáció tétele csak elégséges feltétel a megoldásra, azaz nem megfordítható: lehet adni olyan feladat-program párt, ahol a program megoldja a feladatot, de a specifikáció tétele nem teljesül. Ez természetesen attól is függ, hogy a feladatot hogyan specifikáljuk, azaz milyen paraméterteret választunk, és hogyan bontjuk a feladatot F_1 és F_2 relációk kompozíciójára.

5.3. A változó fogalma

Az eddig elmondottakból alapján a specifikáció tétele még nem lenne hatékonyan használható, hiszen a paramétertér minden pontjára ellenőriznünk kellene a feltételek teljesülését. Ezért bevezetjük a változó fogalmát, aminek segítségével a feltételrendszer teljesülése egyszerűen ellenőrizhetővé válik.

---

18. DEFINÍCIÓ: VÁLTOZÓ

Az $A = A_1 \times \cdots \times A_n$ állapottér $v_i : A \to A_i$ egydimenziós projekciós függvényeit változóknak nevezzük.

A változók használatával egyszerűsíthetjük az állapottéren értelmezett állítások (elő- és utófeltételek, leggyengébb előfeltétel) és relációk (programfüggvény) leírását.

Mivel minden változó értelmezési tartománya az állapottér, és értékkészlete egy típusértékhalmaz, egy változót jellemezhetünk egy típussal, azaz beszélhetünk a változó típusáról.

Ha a paramétertér is direktszorzat alakú – márpedig ez gyakran így van, ugyanis általában az állapottér egy altere – akkor a paramétertér egydimenziós projekciós függvényeit paraméterváltozóknak nevezzük.

Az állapottér illetve a paramétertér egyes komponenseihez tartozó vátozókat illetve paraméterváltozókat az adott komponens alá írjuk.

Tekintsünk egy egyszerű példát: határozzuk meg két egész szám maximumát!

$$
\begin{array}{lllllll}
A & = & \mathbb{Z} & \times & \mathbb{Z} & \times & \mathbb{Z} \\
 & & x & & y & & z \\
B & = & \mathbb{Z} & \times & \mathbb{Z} & & \\
 & & x' & & y' & &
\end{array}
$$

Az első sor tehát azt jelenti, hogy az állapottér három egész komponensből áll, melyeknek változói rendre x, y és z. Hasonlóan a második sor jelentése: a paramétertér két egész komponensből áll, az első komponens változója x', a másodiké y'.

A paramétertér egy tetszőleges b eleméhez tartozó elő- és utófeltétel az állapottér egy tetszőleges a pontjában:

$$
\begin{aligned}
Q_{x'(b),y'(b)}(a) &= (x(a) = x'(b) \land y(a) = y'(b)) \\
R_{x'(b),y'(b)}(a) &= (z(a) \geq x'(b) \land z(a) \geq y'(b) \land (z(a) = x'(b) \lor z(a) = y'(b))
\end{aligned}
$$

A fenti jelölést tovább szoktuk egyszerűsíteni: mivel az állapottér változói és a paraméterváltozók mindenütt azonos argumentummal szerepelnek, az argumentumot – hiszen az nyilvánvaló – nem írjuk ki:

$$
\begin{aligned}
Q_{x',y'} &= (x = x' \land y = y') \\
R_{x',y'} &= (z \geq x' \land z \geq y' \land (z = x' \lor z = y'))
\end{aligned}
$$

A jelölés tovább egyszerűsíthető! Mivel ezek a feltételek a paramétertér pontjaihoz tartoznak, nyilvánvaló, hogy a paraméterváltozók értékeitől függnek. Ha nyilvánvaló, akkor az állítások indexe el is hagyható. A feladat specifikációja tehát:

$$
\begin{aligned}
A &= \underset{x}{\mathbb{Z}} \times \underset{y}{\mathbb{Z}} \times \underset{z}{\mathbb{Z}} \\
B &= \underset{x'}{\mathbb{Z}} \times \underset{y'}{\mathbb{Z}}
\end{aligned}
$$

$Q : (x = x' \wedge y = y')$

$R : (z \geq x' \wedge z \geq y' \wedge (z = x' \vee z = y'))$

A változók segítségével könnyen felírhatunk olyan függvényeket, amelyek az állapottér bizonyos komponensein vannak értelmezve. Ha nem okoz félreértést, akkor az $f \circ (v_{i_1}, \ldots, v_{i_k})$ jelölés helyett az $f(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k})$ jelölést használjuk.

A későbbiekben bevezetünk majd olyan eszközöket, amelyek segítségével a feladat specifikációjából kiindulva olyan programokat készíthetünk, amelyek megoldják a feladatot.

5.4. A típusspecifikáció tétele

A típusspecifikáció és a típus fogalmának bevezetésével tulajdonképpen a feladat fogalmát általánosítottuk, míg a megfeleltetés a megoldás fogalmának volt egyfajta általánosítása. Az imént megismert specifikáció tétele a megoldásra adott elégséges feltételt. Próbáljunk most a ϱ-n keresztüli megoldásra egy hasonló feltételt adni!

5. TÉTEL: TÍPUSSPECIFIKÁCIÓ TÉTELE

Legyen $\mathcal{T}_s = (T, I_s, \mathbb{F})$ és $\mathcal{T} = (\varrho, I, \mathbb{S})$ adott típusspecifikáció és típus, és tegyük fel, hogy a reprezentáció helyes, azaz $\varrho(\lceil I \rceil) = \lceil I_s \rceil$. Legyen továbbá $F \in \mathbb{F}$, az F állapottere A, egy paramétertere B, elő és utófeltétele pedig Q_b és R_b. Legyen $S \in \mathbb{S}$ és tegyük fel, hogy S állapottere illeszkedik F állapotteréhez. Definiáljuk a következő állításokat:

$$
\begin{aligned}
\lceil Q_b^{\gamma} \rceil &= \lfloor Q_b \circ \gamma \rfloor \\
\lceil R_b^{\gamma} \rceil &= \lceil R_b \circ \gamma \rceil
\end{aligned}
$$

ahol γ a program és a feladat állapottere közötti, a ϱ-n keresztüli megoldás definíciójában szereplő leképezés. Ekkor ha $\forall b \in B : Q_b^{\gamma} \Rightarrow lf(S, R_b^{\gamma})$, akkor az S program a ϱ-n keresztül megoldja az F feladatot.

Bizonyítás: A ϱ-n keresztüli megoldás definíciója két pontjának teljesülését kell belátnunk:

1. $\mathcal{D}_F \subseteq \mathcal{D}_{\gamma \odot p(S) \odot \gamma^{(-1)}}$, ui.

   Legyen $a \in \mathcal{D}_F$. Ekkor $\exists b \in B : a \in \lceil Q_b \rceil$. Mivel $\varrho(\lceil I \rceil) = \lceil I_s \rceil$,

$$\gamma^{(-1)}(a) \neq \emptyset \wedge \gamma^{(-1)}(a) \subseteq \lceil Q_b^{\gamma} \rceil.$$

   Felhasználva, hogy $\lceil Q_b^{\gamma} \rceil \subseteq \lceil lf(S, R_b^{\gamma}) \rceil$:

$$\gamma^{(-1)}(a) \subseteq \mathcal{D}_{p(S)} \wedge p(S)(\gamma^{(-1)}(a)) \subseteq \lceil R_b^{\gamma} \rceil.$$

Mivel $\lceil R_b^\gamma \rceil = \lceil R_b \circ \gamma \rceil$,

$$p(S)(\gamma^{(-1)}(a)) \subseteq \mathcal{D}_\gamma$$

tehát

$$a \in \mathcal{D}_{\gamma \odot p(S) \odot \gamma^{(-1)}}.$$

2. $\forall a \in \mathcal{D}_F : \gamma \odot p(S) \odot \gamma^{(-1)} \subseteq F(a)$, ui.

   Legyen $a \in \mathcal{D}_F$. A bizonyítás első részében leírt lépéseket folytatva: mivel $p(S)(\gamma^{(-1)}(a)) \subseteq \lceil R_b \circ \gamma \rceil$,

$$\gamma(p(S)(\gamma^{(-1)}(a))) \subseteq \lceil R_b \rceil \subseteq F(a).$$

$\square$

Az, hogy a fenti tétel feltételei között kikötöttük, hogy a program állapottere illeszkedik a feladat állapotteréhez tulajdonképpen elhagyható. Ekkor a tétel a feladat és a program olyan kiterjesztéseire mondható ki, amelyek állapotterei illeszkednek egymáshoz (pontosan úgy, ahogy a megfeleltetést definiáltuk nem illeszkedő állapotterek között).

A következő példában megmutatjuk, hogy Q_b^γ-t gyenge igazsáhalmaz helyett erős igazsághalmazzal definiálnánk, akkor a tétel nem lenne igaz.

Legyen $\mathcal{T}_s = (T, I_s, \mathbb{F})$, $T = \{1, 2\}$, $I_s = \uparrow$, $\mathbb{F} = \{F\}$. Legyen F állapottere $A = T$ és a paramétertér is legyen ugyanez: $B = T$. Legyen F specifikációja:

$$\begin{array}{rclrcl} \lceil Q_1 \rceil & = & \{1\}, & \lceil R_1 \rceil & = & \{2\} \\ \lceil Q_2 \rceil & = & \emptyset, & \lceil R_2 \rceil & = & \{1\} \end{array}$$

Ekkor $\mathcal{D}_F = \{1\}$ és $F(1) = \{2\}$. Legyen továbbá az elemi értékek halmaza $E = \{a, b\}$, $\mathcal{T} = (\varrho, I, \mathbb{S}), \forall \alpha \in E^* : I(\alpha) = (|\alpha| = 1)$, és ϱ az egy hosszú sorozatokra:

$$\varrho(\langle a \rangle) = \varrho(\langle b \rangle) = \{1, 2\}.$$

Tegyük fel, hogy $\mathbb{S} = \{S\}$, $S \subseteq E^* \times (E^*)^{**}$, és rendelje S az állapottere minden pontjához az önmagából álló egy hosszú sorozatot. Ennek a programnak az állapottere illeszkedik a fenti feladat állapotteréhez, és $\gamma = \varrho$. Ekkor

$$\lceil Q_1 \circ \gamma \rceil = \emptyset \quad \text{és} \quad \lceil Q_2 \circ \gamma \rceil = \emptyset,$$

tehát

$$\begin{array}{rcl} Q_1 \circ \gamma & \Rightarrow & lf(S, R_1 \circ \gamma) \\ Q_1 \circ \gamma & \Rightarrow & lf(S, R_1 \circ \gamma) \end{array}$$

Az viszont könnyen látható, hogy

$$\gamma \odot p(S) \odot \gamma^{(-1)}(1) = \{1, 2\} \not\subseteq F(1) = \{2\}$$

tehát a típus nem felel meg a specifikációnak.

5.5. Példák

1. példa: Legyen $A = \{Keats, Bach, Mozart, Liszt, Poe, Byron\}$, $S \subseteq A \times A^{**}$ program.

$$\begin{array}{llllll} S = \{ & Keats & \to \langle Keats, Bach\rangle, & Bach & \to \langle Bach, Mozart\rangle, \\ & Bach & \to \langle Bach, Liszt, Byron\rangle, & Mozart & \to \langle Mozart, Keats\rangle, \\ & Liszt & \to \langle Liszt, Byron\rangle, & Poe & \to \langle Poe, Mozart\rangle, \\ & Byron & \to \langle Byron, Bach, Liszt\rangle\} & & \end{array}$$

Legyen továbbá az $R : A \to \mathbb{L}$ állítás:
$\forall x \in A: \quad R(x) = (x$ zeneszerző$)$.
Mi lesz a fenti program R-hez tartozó leggyengébb előfeltétele?
Megoldás: Írjuk fel először a program programfüggvényét:

$$\begin{array}{llll} p(S) = \{ & (Keats, Bach), & (Bach, Mozart), & (Bach, Byron), \\ & (Mozart, Keats), & (Liszt, Byron), & (Poe, Mozart), \\ & (Byron, Liszt) & \} & \end{array}$$

Ezek után, a leggyengébb előfeltétel definícióját felhasználva:
$\lceil lf(S,R)\rceil = \{Keats, Poe, Byron\}$, ui.

$$\begin{array}{rcl} p(S)(Keats) & = & \{Bach\} \subseteq \lceil R\rceil \\ p(S)(Poe) & = & \{Mozart\} \subseteq \lceil R\rceil \\ p(S)(Byron) & = & \{Liszt\} \subseteq \lceil R\rceil \\ p(S)(Bach) & = & \{Mozart, Byron\} \not\subseteq \lceil R\rceil \\ p(S)(Mozart) & = & \{Keats\} \not\subseteq \lceil R\rceil \\ p(S)(Liszt) & = & \{Byron\} \not\subseteq \lceil R\rceil \end{array}$$

2. példa: Legyen $H_1, H_2 : A \to \mathbb{L}$. Igaz-e, hogy ha minden $S \subseteq A \times A^{**}$ programra $lf(S, H_1) = lf(S, H_2)$, akkor $\lceil H_1\rceil = \lceil H_2\rceil$?
Megoldás: Felhasználva, hogy a leggyengébb előfeltételek minden programra megegyeznek, egy alkalmas program választásával a válasz egyszerűen megadható: rendelje az S program az állapottér minden eleméhez az önmagából álló egy hosszúságú sorozatot. Ekkor könnyen látható, hogy tetszőleges R utófeltétel esetén:

$$lf(S,R) = R.$$

Ekkor viszont

$$H_1 = lf(S, H_1) = lf(S, H_2) = H_2,$$

tehát a két feltétel megegyezik.

3. példa: Specifikáljuk a következő feladatot: $A = \mathbb{L} \times \mathbb{L}$, $\quad F \subseteq A \times A$,

$$F = \{((l, k), (l', k')) \mid k' = k \wedge l' = (l \wedge k)\}$$

Megoldás:

$$A = \underset{x}{\mathbb{L}} \times \underset{y}{\mathbb{L}}$$
$$B = \underset{x'}{\mathbb{L}} \times \underset{y'}{\mathbb{L}}$$
$$Q : (x = x' \wedge y = y')$$
$$R : (x = (x' \wedge y') \wedge y = y')$$

4. példa: Legyen $F \subseteq A \times A$, $S \subseteq A \times A^{**}$ program, B egy tetszőleges halmaz. Legyenek továbbá $F_1 \subseteq A \times B$ és $F_2 \subseteq B \times A$ olyan relációk, hogy $F = F_2 \circ F_1$, valamint $\forall b \in B$:

$$\begin{aligned} \lceil \widehat{Q}_b \rceil &= F_1^{-1}(b) \\ \lceil R_b \rceil &= F_2(b). \end{aligned}$$

Igaz-e, hogy ha $\forall b \in B : \widehat{Q}_b \Rightarrow lf(S, R_b)$, akkor S megoldja F-et?
Megoldás: Próbáljuk meg a megoldás definíciója két pontját belátni. Legyen $a \in \mathcal{D}_F$. Be kellene látnunk, hogy $a \in \mathcal{D}_{p(S)}$. Nézzük meg a specifikáció tételének bizonyítását: ott felhasználtuk, hogy ekkor van olyan $b \in B$, hogy $a \in \lceil Q_b \rceil$. Igaz ez a $\widehat{Q}_b$-re is? Sajnos – mivel $\widehat{Q}_b$-t ősképpel definiáltuk, ez nem feltétlenül van így. Próbáljunk a fenti gondolatmenet alapján ellenpéldát adni:
Legyen $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$, $F = \{(1, 1)\}$, $F_1 = \{(1, 1), (1, 2)\}$, $F_2 = \{(2, 1)\}$. Ekkor $\widehat{Q}_1 = hamis$ és $\widehat{Q}_2 = hamis$, tehát az állítás feltételei teljesülnek függetlenül a programtól (ui. "hamisból minden következik"). Válasszuk most az alábbi programot: $S = \{(1, < 1, 1, ... >)\}$. Ez a program nem megoldása a feladatnak, de teljesülnek rá is az állítás feltételei. Tehát az állítás nem igaz.

5.6. Feladatok

1. Legyen A tetszőleges állapottér, $Q_i : A \to \mathbb{L} \quad (i \in \mathbb{N})$. Igaz-e, ha
$$\forall i \in \mathbb{N} : \; Q_i \Rightarrow Q_{i+1},$$
akkor
$$(\exists n \in \mathbb{N} : \; lf(S, Q_n)) = lf(S, (\exists n \in \mathbb{N} : \; Q_n))?$$

2. Igaz-e, hogy ha $lf(S_1, R) = lf(S_2, R)$, akkor $lf(S_1 \cup S_2, R) = lf(S_1, R) \vee lf(S_2, R)$?

3. Igaz-e, ha $\forall x, y \in A : \; x \in \lceil lf(S_1, \mathcal{P}(\{y\})) \rceil \Leftrightarrow x \in \lceil lf(S_2, \mathcal{P}(\{y\})) \rceil$, akkor $\mathcal{D}_{p(S_1)} = \mathcal{D}_{p(S_2)}$?

4. $S_1, S_2 \subseteq A \times A^{**}$ programok. Igaz-e, ha $\forall H : A \to \mathbb{L}$ esetén $lf(S_1, H) = lf(S_2, H)$, akkor S_1 ekvivalens S_2-vel?

5. Adott az $A = V \times V \times \mathbb{L}$ állapottér $(V = \{1, 2, 3\})$ és a $B = V \times V$ paramétertér, továbbá az F_1 és F_2 feladatok.

$$F_1 = \{((a_1, a_2, l), (b_1, b_2, k)) \mid k = (a_1 > a_2)\},$$

F_2 specifikációja pedig:

$$\begin{array}{rcccccc} A & = & V & \times & V & \times & \mathbb{L} \\ & & a_1 & & a_2 & & l \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc} B & = & V & \times & V \\ & & a_1' & & a_2' \end{array}$$

$Q : (a_1 = a_1' \wedge a_2 = a_2')$
$R : (Q \wedge l = (a_1' > a_2'))$

Azonosak-e az F_1 és F_2 feladatok?

6. Tekintsük az alábbi két feladatot: F_1 specifikációja:

$$\begin{array}{rcccc} A & = & \mathbb{Z} & \times & \mathbb{Z} \\ & & x & & y \end{array}$$

$$\begin{array}{rcc} B & = & \mathbb{Z} \\ & & x' \end{array}$$

$Q : (x = x')$
$R : (Q \wedge x = |y * y|)$

$$F_2 = \{((a, b), (c, d)) \mid c = a \wedge |d| * d = c\}.$$

Megadható-e valamilyen összefüggés F_1 és F_2 között?

7. Írd le szövegesen az alábbi feladatot: legyen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$,

$$\begin{array}{rcccccc} A & = & \mathbb{Z} & \times & \mathbb{Z} & \times & \mathbb{N}_0 \\ & & m & & n & & l \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc} B & = & \mathbb{Z} & \times & \mathbb{Z} \\ & & m' & & n' \end{array}$$

$Q : (m = m' \wedge n = n' \wedge m \leq n)$
$R : (Q \wedge l = \sum\limits_{i=1}^{n} g(i))$

ahol $g : \mathbb{Z} \to \{0, 1\}$,

$$g(i) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \exists x \in \mathbb{Z} : \ (f(i) = x \wedge \forall j \in [m..n] : f(j) \leq m) \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

8. Igaz-e a specifikáció tételének megfordítása? (Ha S megoldja F-et, akkor $\forall b \in B : \ Q_b \Rightarrow lf(S, R_b)$)

9. Tekintsük az alábbi feladatot:

$$A = \underset{k}{\mathbb{Z}} \times \underset{p}{\mathbb{Z}}$$

$$B = \underset{k'}{\mathbb{Z}}$$

$Q : (k = k' \wedge 0 < k)$

$R : (Q \wedge prim(p) \wedge \forall i > 1 : prim(i) \rightarrow |k - i| \geq |k - p|)$

ahol $prim(x) = (x$prímszám$)$.

Mit rendel a fent specifikált feladat az $a = (10, 1)$ és a $b = (9, 5)$ pontokhoz? Fogalmazd meg szavakban a feladatot!