## 7.4. A programkonstrukciók és a kiszámíthatóság

Ebben az alfejezetben kis kitérőt teszünk a kiszámíthatóság-elmélet felé, és megmutatjuk, hogy az imént bevezetett három programkonstrukció segítségével minden – elméletileg megoldható – feladatot meg tudunk oldani. Ehhez kapcsolatot létesítünk a kiszámítható függvények és a "jól konstruált" programok között.

### 7.4.1. Parciális rekurzív függvények

A Church tézis szerint a kiszámítható függvények halmaza megegyezik a parciális rekurzív függvények halmazával. A kiszámíthatóság ezen modelljében csak $f \in \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}^n$ típusú függvények szerepelnek. Először az alapfüggvényeket definiáljuk:

- $suc : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{N}$:
$$suc(x) = x + 1,$$
- $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \quad c_1^{(n)} : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}, \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n :$
$$c_1^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = 1,$$
- $\forall n \in \mathbb{N} : \forall i \in [1..n] : \quad pr_i^{(n)} : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}, \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n :$
$$pr_i^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = x_i.$$

A továbbiakban definiálunk néhány elemi függvény-operátort:

**Kompozíció** Legyen $f \in \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}^n$ és $g \in \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^k$. Az $f$ és $g$ kompozíciója az alábbi függvény:

$g \circ f \in \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}^k, \quad \mathcal{D}_{g \circ f} = \{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \in \mathcal{D}_g\}$ és $\forall x \in \mathcal{D}_{g \circ f}$:
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Vegyük észre, hogy ez az operátor megegyezik az alapfogalmaknál bevezetett relációk közötti kompozícióval (tulajdonképpen a szigorú kompozícióval, de függvények esetén ez a kettő azonos).

**Unió** Legyen $k \in \mathbb{N}$ rögzített, és $\forall i \in [1..k] : f_i \in \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}^{n_i}$. E függvények uniója $(f_1, f_2, \dots, f_k) \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{N}^{n_k}, \mathcal{D}_{(f_1, f_2, \dots, f_k)} = \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{D}_{f_i}$ és $\forall x \in \mathcal{D}_{(f_1, f_2, \dots, f_k)}$:
$$(f_1, f_2, \dots, f_k)(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x)).$$

**Rekurzió** Legyen $n$ rögzített, $f \in \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ és $g \in \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$. Az $f$ függvény $g$ szerinti rekurziója $\varrho(f,g) \in \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$, és

$$\begin{aligned} \varrho(f,g)(x_1, \dots, x_n, 1) &= f(x_1, \dots, x_n), \\ \varrho(f,g)(x_1, \dots, x_n, k+1) &= g(x_1, \dots, x_n, k, \varrho(f,g)(x_1, \dots, x_n, k)). \end{aligned}$$

A függvényhez hasonlóan rekurzívan definiálhatnánk ennek a függvénynek az értelmezési tartományát, de ez kívül esik a jelenlegi vizsgálódásunk körén. Ezért csak azt mondjuk, hogy az értelmezési tartomány azon pontok halmaza, ahonnét kiindulva a fenti rekurzió elvégezhető.

**$\mu$-operátor** Legyen $f \in \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$. A $\mu$-operátort erre a függvényre alkalmazva azt a $\mu(f) \in \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ függvényt kapjuk, amelyre $\mathcal{D}_{\mu(f)} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n \mid \exists y \in \mathbb{N} : \ f(x_1, \dots, x_n, y) = 1 \wedge \forall i \in [1..y-1] : \ (x_1, \dots, x_n, i) \in \mathcal{D}_f\}$, és $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{D}_{\mu(f)}$:

$$mu(f)(x_1, \dots, x_n) = min\{y \mid f(x_1, \dots, x_n, y) = 1\}.$$

A fenti alapfüggvények és a bevezetett operátorok segítségvel már definiálható a parciális rekurzív függvények halmaza.

**28. DEFINÍCIÓ:** PARCIÁLIS REKURZÍV FÜGGVÉNY
Az $f : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}^n \, (n, m \in \mathbb{N})$ függvény akkor és csak akkor parciális rekurzív, ha az alábbiak egyike teljesül:

- $f$ az alapfüggvények valamelyike
- $f$ kifejezhető a fenti operátorok parciális rekurzív függvényekre történő alkalmazásával.

### 7.4.2. A parciális rekurzív függvények kiszámítása

Ahhoz, hogy a fenti függvényeket kiszámító programokat tudjunk adni, definiálnunk kell az ilyen függvények által meghatározott feladatot. Legyen $f : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}^n$ egy tetszőleges függvény ($m, n$ rögzített). Az $f$ által meghatározott feladat specifikációja:

$$\begin{array}{lllllllll}
A = & \mathbb{N} & \times \dots \times & \mathbb{N} & \times & \mathbb{N} & \times \dots \times & \mathbb{N} \\
 & x_1 & & x_m & & y_1 & & y_m \\
B = & \mathbb{N} & \times \dots \times & \mathbb{N} & & & & \\
 & x'_1 & & x'_m & & & &
\end{array}$$

$$Q : (x_1 = x'_1 \wedge \dots \wedge x_m = x'_m \wedge (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{D}_f)$$

$$R : (Q \wedge (y_1, \dots, y_n) = f(x'_1, \dots, x'_m))$$

Most megmutatjuk, hogy minden parciális rekurzív függvény által meghatározott feladat megoldható "jól konstruált" programmal (jól konstruáltnak tekintünk egy programot, ha elemi programokból a fenti három konstrukcióval megkapható). A bizonyításhoz csak annyit kell feltételeznünk, hogy az alapfüggvények kiszámíthatók (megengedett) elemi programokkal.

A fenti feltételezést felhasználva elegendő azt megmutatni, hogy az elemi függvény-operátorok (kompozíció, unió, rekurzió, $\mu$-operátor) kiszámíthatók jól konstruált programokkal.

#### Kompozíció

Legyen $f \in \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}^n$ és $g \in \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^k$. Ekkor az $g \circ f$ által meghatározott feladat specifikációja:

$$\begin{array}{lllllllll}
A = & \mathbb{N} & \times \dots \times & \mathbb{N} & \times & \mathbb{N} & \times \dots \times & \mathbb{N} \\
 & x_1 & & x_m & & y_1 & & y_k \\
B = & \mathbb{N} & \times \dots \times & \mathbb{N} & & & & \\
 & x'_1 & & x'_m & & & &
\end{array}$$

$Q : (x_1 = x'_1 \wedge \cdots \wedge x_m = x'_m \wedge (x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{D}_{g \circ f})$
$R : (Q \wedge (y_1, \ldots, y_n) = (g \circ f)(x'_1, \ldots, x'_m))$

Jelöljük $z_1, \ldots, z_n := f(x_1, \ldots, x_m)$-mel azt a programot, amely kiszámítja $f$-et, és hasonlóan $y_1, \ldots, y_k := g(z_1, \ldots, z_n)$-nel azt, amelyik kiszámítja $g$-t. Tegyük fel, hogy ez a két program vagy elemi értékadás, vagy jól konstruált program. Ebben az esetben a két program szekvenciája kiszámítja $g \circ f$-et, azaz megoldja a fent specifikált feladatot. Legyen $Q'$ a második program $R$ utófeltételhez tartozó leggyengébb előfeltétele:

$Q' : (Q \wedge g(z_1, \ldots, z_n) = (g \circ f)(x'_1, \ldots, x'_m) \wedge (z_1, \ldots, z_n) \in \mathcal{D}_g)$

Most vizsgáljuk meg az első program ezen $Q'$ utófeltételhez tartozó leggyengébb előfeltételét:

$$\begin{aligned} lf(z_1, \ldots, z_n := f(x_1, \ldots, x_m), Q') = (Q \wedge g(f(x_1, \ldots, x_m)) = \\ (g \circ f)(x'_1, \ldots, x'_m) \wedge f(x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{D}_g \wedge (x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{D}_f) \end{aligned}$$

Könnyen látható, hogy ez a leggyengébb előfeltétel következik $Q$-ból, és így a szekvencia levezetési szabálya és a specifikáció tételének alkalmazásával beláttuk, hogy a

| |
|---|
| $z_1, \ldots, z_n := f(x_1, \ldots, x_m)$ |
| $y_1, \ldots, y_k := g(z_1, \ldots, z_n)$ |

program megoldja a fent specifikált feladatot, azaz kiszámítja $f$ és $g$ kompozícióját.

### Unió

Legyen $k \in \mathbb{N}$ rögzített, és $\forall i \in [1..k] : f_i \in \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}^{n_i}$. Ekkor az e függvények uniója által meghatározott feladat specifikációja:

$$\begin{aligned} A = & \underset{x_1}{\mathbb{N}} \times \ldots \times \underset{x_m}{\mathbb{N}} \times \\ & \times \underset{y_{1_1}}{\mathbb{N}} \times \ldots \times \underset{y_{1_{n_1}}}{\mathbb{N}} \\ & \vdots \\ & \times \underset{y_{k_1}}{\mathbb{N}} \times \ldots \times \underset{y_{k_{n_k}}}{\mathbb{N}} \\ B = & \underset{x'_1}{\mathbb{N}} \times \ldots \times \underset{x'_m}{\mathbb{N}} \end{aligned}$$

$Q : (x_1 = x'_1 \wedge \cdots \wedge x_m = x'_m \wedge (x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{D}_{(f_1, \ldots, f_k)})$
$R : (Q \wedge (y_{1_1}, \ldots, y_{1_{n_1}} \ldots y_{k_1}, \ldots, y_{k_{n_k}}) = (f_1, \ldots, f_k)(x'_1, \ldots, x'_m))$

Tegyük fel, hogy a komponens függvények kiszámíthatók jól konstruált programmal, vagy elemi értékadással. Jelölje $y_{i_1}, \ldots, y_{i_{n_i}} := f_i(x_1, \ldots, x_m)$ az $i$-edik függvényt ($1 \leq i \leq k$) kiszámító programot. Ekkor ezeknek a programoknak a szekvenciája megoldja a fenti feladatot. Legyen $Q_k$ a $k$-adik program $R$ utófeltételhez tartozó leggyengébb előfeltételét:

$$\begin{aligned} Q_k : (Q \wedge (y_{1_1}, \ldots, y_{1_{n_1}} \ldots y_{k-1_1}, \ldots, y_{k-1_{n_{k-1}}}, f_k(x_1, \ldots, x_m)) = \\ (f_1, \ldots, f_k)(x'_1, \ldots, x'_m) \wedge (x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{D}_{f_k}) \end{aligned}$$

Továbbá minden $i \in [1..k-1]$ esetén jelölje $Q_i$ az $i$-edik program $Q_{i+1}$-hez tartozó leggyengébb előfeltételét. Könnyen látható, hogy az értékadás leggyengébb előfeltételére vonatkozó szabályt alkalmazva:

$$Q_1 : (Q \wedge (f_1(x_1,\dots,x_m),\dots,f_k(x_1,\dots,x_m)) = (f_1,\dots,f_k)(x'_1,\dots,x'_m) \wedge$$
$$(x_1,\dots,x_m) \in \mathcal{D}_{f_1} \wedge \dots \wedge (x_1,\dots,x_m) \in \mathcal{D}_{f_k})$$

Ha most $Q$-t és $Q_1$-et összehasonlítjuk, észrevehetjük, hogy megegyeznek. A szekvencia levezetési szabálya és a specifikáció tétele alapján a

| |
|---|
| $y_{1\,1},\dots,y_{1\,n_1} := f_1(x_1,\dots,x_m)$ |
| $\vdots$ |
| $y_{k\,1},\dots,y_{k\,n_k} := f_k(x_1,\dots,x_m)$ |

program megoldása a fent specifikált feladatnak, azaz kiszámítja $(f_1,\dots,f_k)$-t.

### Rekurzió

Legyen $n$ rögzített, $f \in \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ és $g \in \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$. Tegyük fel, hogy mindketten kiszámíthatók jól konstruált programokkal vagy egyszerű értékadásokkal. Az $f$ függvény $g$ szerinti rekurziója által meghatározott feladat specifikációja:

$$A = \underset{x_1}{\mathbb{N}} \times \dots \times \underset{x_{n+1}}{\mathbb{N}} \times \underset{y}{\mathbb{N}}$$
$$B = \underset{x'_1}{\mathbb{N}} \times \dots \times \underset{x'_{n+1}}{\mathbb{N}}$$
$$Q : (x_1 = x'_1 \wedge \dots \wedge x_{n+1} = x'_{n+1} \wedge (x_1,\dots,x_{n+1}) \in \mathcal{D}_{\varrho(f,g)})$$
$$R : (Q \wedge y = \varrho(f,g)(x'_1,\dots,x'_{n+1}))$$

Jelölje az $f$-et és a $g$-t kiszámító programot $y := f(x_1,\dots,x_n)$ illetve $y := g(x_1,\dots,x_{n+2})$. Oldjuk meg a feladatot egy olyan ciklussal, amelynek invariáns tulajdonsága:

$$P : (Q \wedge k \in [1..x_{n+1}] \wedge y = \varrho(f,g)(x'_1,\dots,x_n,k))$$

A ciklus levezetési szabályát vizsgálva azt találjuk, hogy $Q$-ból nem következik $P$. Ezért adunk egy olyan $Q'$ feltételt, amelyből már következik $P$, és adunk egy programot, amely $Q$-ból $Q'$-be jut (így a megoldóprogram egy szekvencia lesz, amelynek második része egy ciklus). Legyen $Q'$ az alábbi:

$$P : (Q \wedge k = 1 \wedge y = f(x_1,\dots,x_n))$$

Ez a $k, y := 1, f(x_1,\dots,x_n)$ szimultán értékadással elérhető. Az értékadás leggyengébb előfeltételére vonatkozó szabály felhasználásával könnyen látható, hogy az következik $Q$-ból.

A ciklus levezetési szabályának második pontja alapján a ciklusfeltétel $k \neq x_{n+1}$ lesz.

A harmadik pontnak megfelelően válasszuk a $t = x_{n+1} - k$ kifejezést termináló függvénynek.

Az ötödik pont azt írja le, hogy az imént definiált termináló fügvény értékének a ciklusmagban csökkennie kell. Ez elérhető a $k$ eggyel való növelésével.

A négyes pont kielégítéséhez vizsgáljuk meg, hogy mi lesz a leggyengébb előfeltétele a $k$-t növelő értékadásnak a $P$-re vonatkozóan.

$$Q'' = lf(k := k+1, P) \quad = \quad (Q \wedge k+1 \in [1..x_{n+1}] \;\wedge \\ y = \varrho(f,g)(x'_1, \dots, x'_n, k+1)).$$

Most már – a szekvencia levezetési szabálya alapján – csak egy olyan programot kell találnunk, amelyre $P \wedge (k \neq x_{n+1}) \Rightarrow lf(S, Q'')$. Ez a program a rekurzió definíciójához illeszkedően épp $y := g(x_1, \dots, x_n, k, y)$ lesz.

Így a szekvencia és a ciklus levezetés szabálya valamint a specifikáció tétele garantálja, hogy a

| |
|---|
| $k, y := 1, f(x_1, \dots, x_n)$ |
| $k \neq x_{n+1}$ |
| $y := g(x_1, \dots, x_n, k, y)$ |
| $k := k+1$ |

program megoldja a $\varrho(f,g)$ által meghatározott feladatot, azaz kiszámítja $f$ $g$ szerinti rekurzióját.

### $\mu$-operátor

Legyen $f \in \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$, és tegyük fel, hogy $f$ kiszámítható egyszerű értékadással vagy jól konstruált programmal. Tekintsük a $\mu(f)$ által meghatározott feladatot:

$$A = \underset{x_1}{\mathbb{N}} \times \ldots \times \underset{x_n}{\mathbb{N}} \times \underset{y}{\mathbb{N}}$$
$$B = \underset{x'_1}{\mathbb{N}} \times \ldots \times \underset{x'_n}{\mathbb{N}}$$
$$Q : (x_1 = x'_1 \wedge \dots \wedge x_n = x'_n \wedge (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathcal{D}_{\mu(f)})$$
$$R : (Q \wedge y = \mu(f)(x'_1, \dots, x'_n))$$

Jelölje $z := f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ az $f$-et kiszámító programot. Oldjuk meg a feladatot egy olyan ciklussal, melynek invariánsa:

$$P : (Q \wedge z = f(x_1, \dots, x_n, y) \wedge \forall i \in [1..y-1] : f(x_1, \dots, x_n, i) \neq 1)$$

Az invariáns a $z, y := f(x_1, \dots, x_n, 1), 1$ szimultán értékadással teljesíthető. Könnyen látható, hogy ennek a programnak a $P$-re vonatkozó leggyengébb előfeltétele

$$lf(z, y := f(x_1, \dots, x_n, 1), 1; P) \quad = \quad (Q \wedge f(x_1, \dots, x_n, 1) = f(x_1, \dots, x_n, 1) \\ \wedge \forall i \in [1..1-1] : f(x_1, \dots, x_n, i) \neq 1)$$

következik $Q$-ból. A ciklus levezetési szabályának második pontja alapján a ciklusfeltétel $z \neq 1$ lesz.

A feladat előfeltétele garantálja, hogy van olyan $m \in \mathbb{N}$ szám, amelyre $f(x_1, \dots, x_n, m) = 1$ fennáll. Legyen $N$ egy ilyen tulajdonságú, rögzített természetes szám. Ennek az értéknek a segítségével definiálhatjuk a termináló függvényt: $t = N - y$. Ez kielégíti a levezetés szabály harmadik pontját.

Az ötödik pont megkívánja, hogy a termináló függvény a ciklusmag lefutása során csökkenjen. Ezt elérhetjük $y$ eggyel való növelésével.

A negyedik pont teljesítéséhez legyen $Q'$ ennek a növelésnek a $P$-re vonatkozó leggyengébb előfeltétele:

$Q' : (Q \wedge z = f(x_1, \ldots, x_n, y+1) \wedge \forall i \in [1..y-1] : f(x_1, \ldots, x_n, i) \neq 1)$

Most már csak találnunk kell egy programot a $P \wedge (z \neq 1)$ és $Q'$ állítások közé. A $z := f(x_1, \ldots, x_n, y+1)$ értékadásra teljesül, hogy

$$P \wedge (z \neq 1) \Rightarrow lf(z := f(x_1, \ldots, x_n, y+1), Q').$$

A specifikáció tétele, valamint a ciklus és a szekvencia levezetési szabálya garantálja, hogy a

| | |
|---|---|
| $z, y := f(x_1, \ldots, x_n, 1), 1$ | |
| $z \neq 1$ | |
| | $z := f(x_1, \ldots, x_n, y+1)$ |
| | $y := y + 1$ |

program megoldja a $\mu(f)$ által meghatározott feladatot, azaz kiszámítja $\mu(f)$-et.

### 7.4.3. Következmény

Az előzőekben megmutattuk, hogy ha az alapfüggvények kiszámíthatók egyszerű értékadással, akkor a belőlük – a parciális rekurzív függvényeknél megengedett – operátorokkal felépített függvények kiszámíthatók jól konstruált programokkal. A Church tézis szerint a kiszámítható függvények halmaza megegyezik a parciális rekurzív függvények halmazával. Ezek alapján kimondhatjuk az alábbi tételt:

**17. TÉTEL:** STRUKTURÁLT PROGRAMOZÁS ÉS KISZÁMÍTHATÓSÁG

Minden kiszámítható függvény kiszámítható egy jól konstruált programmal.

### 7.4.4. Relációk

Eljutván az előző tételhez, fordítsuk most figyelmünket a relációk felé. Ahhoz, hogy a relációk kiszámíthatóságát megvizsgálhassuk, definiálnunk kell a kiszámítható reláció fogalmát.

**29. DEFINÍCIÓ:** REKURZÍVAN FELSOROLHATÓ RELÁCIÓ

Legyen $R \subseteq \mathbb{N}^k \times \mathbb{N}^k$ tetszőleges reláció. $R$ akkor és csak akkor rekurzívan felsorolható, ha van olyan $f \in \mathbb{N}^{2k} \to \mathbb{N}$ parciális rekurzív függvény, amelynek értelmezési tartományára: $\mathcal{D}_f = R$.

A kiszámíthatóság-elmélethez igazodva, a továbbiakban csak rekurzívan felsorolható relációkkal fogunk foglalkozni. Ahhoz, hogy megmutassuk, hogy minden kiszámítható (rekurzívan felsorolható) feladat – emlékezzünk, hogy minden feladat egy reláció – megoldható strukturált programmal, először megadjuk a rekurzívan felsorolható relációk egy másik jellemzését.

**18. TÉTEL:** KLEENE[1936]

Ha $R$ egy tetszőleges reláció, akkor az alábbi három állítás ekvivalens:

(1) $R$ rekurzívan felsorolható

(2) $R$ egy $f$ parciális rekurzív függvény értékkészlete

(3) $R = \emptyset$ vagy $R$ egy $\varphi$ rekurzív függvény értékkészlete.

Ennek a tételnek a bizonyítása lásd Ref??? konstruktív, azaz megadja mind $f$, mind pedig $\varphi$ felépítését. Mi ezt a $\varphi$ függvényt fogjuk használni a kiszámítható feladatunk megoldóprogramjában.

Legyen $F \subseteq \mathbb{N}^k \times \mathbb{N}^k$ egy rekurzívan felsorolható reláció, és jelölje $\varphi$ az előző tétel konstrukciójával kapott (totális) rekurzív függvényt. Specifikáljuk a feladatot az alábbi módon:

$$\begin{array}{lll} A = & \mathbb{N}^k & \times \; \mathbb{N}^k \\ & x & \quad y \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} B = & \mathbb{N}^k \\ & x' \end{array}$$

$Q : (x = x' \wedge x \in \mathcal{D}_F)$

$R : (Q \wedge (x, y) \in F)$

Ez a feladat megoldható egy olyan ciklussal, amelynek invariáns tulajdonsága:

$P : (Q \wedge i \in \mathbb{N} \wedge (z, y) = \varphi(i))$

A ciklus levezetési szabályának felhasználásával könnyen belátható, hogy az alábbi program megoldása a fenti feladatnak:

| |
|---|
| $i, (z, y) := 1, \varphi(1)$ |
| $z \neq x$ |
| $(z, y) := \varphi(i + 1)$ |
| $i := i + 1$ |

A bizonyításban a termináló függvény megadásánál ugyanazt a technikát alkalmazzuk, mint a $\mu$-operátornál.

Ezzel az előzőleg függvényekre kimondott tételünket általánosíthatjuk relációkra:

**19. TÉTEL:** STRUKTURÁLT PROGRAMOZÁS ÉS KISZÁMÍTHATÓ RELÁCIÓK
Minden kiszámítható reláció kiszámítható egy jól konstruált programmal.

### Megjegyzés

Az egyetlen feltevés, amit a fenti meggondolásokban használtunk az volt, hogy az alapfüggvények kiszámíthatóak. Így aztán ezek az eredmények kiterjeszthetők a relatíve kiszámítható függvények (ugyanezen operátorokkal egy tetszőleges alaphalmazból képzett függvények), vagy a parciális rekurzív funkcionálok halmazára is (Ref[1, page 174]).