7.4. A programkonstrukciók és a kiszámíthatóság

Ebben az alfejezetben kis kitérőt teszünk a kiszámíthatóság-elmélet felé, és megmutatjuk, hogy az imént bevezetett három programkonstrukció segítségével minden – elméletileg megoldható – feladatot meg tudunk oldani. Ehhez kapcsolatot létesítünk a kiszámítható függvények és a "jól konstruált" programok között.

7.4.1. Parciális rekurzív függvények

A Church tézis szerint a kiszámítható függvények halmaza megegyezik a parciális rekurzív függvények halmazával. A kiszámíthatóság ezen modelljében csak $f \in \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}^n$ típusú függvények szerepelnek. Először az alapfüggvényeket definiáljuk:

- $suc : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{N}$:
$$suc(x) = x + 1,$$
- $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \quad c_1^{(n)} : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}, \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$:
$$c_1^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = 1,$$
- $\forall n \in \mathbb{N} : \forall i \in [1..n] : \quad pr_i^{(n)} : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}, \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$:
$$pr_i^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = x_i.$$

A továbbiakban definiálunk néhány elemi függvény-operátort:

Kompozíció Legyen $f \in \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}^n$ és $g \in \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^k$. Az f és g kompozíciója az alábbi függvény:

$g \circ f \in \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}^k, \quad \mathcal{D}_{g \circ f} = \{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \in \mathcal{D}_g\}$ és $\forall x \in \mathcal{D}_{g \circ f}$:
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Vegyük észre, hogy ez az operátor megegyezik az alapfogalmaknál bevezetett relációk közötti kompozícióval (tulajdonképpen a szigorú kompozícióval, de függvények esetén ez a kettő azonos).

Unió Legyen $k \in \mathbb{N}$ rögzített, és $\forall i \in [1..k] : f_i \in \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}^{n_i}$. E függvények uniója $(f_1, f_2, \dots, f_k) \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{N}^{n_k}, \mathcal{D}_{(f_1, f_2, \dots, f_k)} = \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{D}_{f_i}$ és $\forall x \in \mathcal{D}_{(f_1, f_2, \dots, f_k)}$:
$$(f_1, f_2, \dots, f_k)(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x)).$$

Rekurzió Legyen n rögzített, $f \in \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ és $g \in \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$. Az f függvény g szerinti rekurziója $\varrho(f, g) \in \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$, és
$$\begin{aligned} \varrho(f,g)(x_1, \dots, x_n, 1) &= f(x_1, \dots, x_n), \\ \varrho(f,g)(x_1, \dots, x_n, k+1) &= g(x_1, \dots, x_n, k, \varrho(f,g)(x_1, \dots, x_n, k)). \end{aligned}$$

A függvényhez hasonlóan rekurzívan definiálhatnánk ennek a függvénynek az értelmezési tartományát, de ez kívül esik a jelenlegi vizsgálódásunk körén. Ezért csak azt mondjuk, hogy az értelmezési tartomány azon pontok halmaza, ahonnét kiindulva a fenti rekurzió elvégezhető.

μ-operátor Legyen $f \in \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$. A μ-operátort erre a függvényre alkalmazva azt a $\mu(f) \in \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ függvényt kapjuk, amelyre $\mathcal{D}_{\mu(f)} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n \mid \exists y \in \mathbb{N} :\ f(x_1, \dots, x_n, y) = 1 \wedge \forall i \in [1..y-1] :\ (x_1, \dots, x_n, i) \in \mathcal{D}_f\}$, és $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{D}_{\mu(f)}$:

$$mu(f)(x_1, \dots, x_n) = min\{y \mid f(x_1, \dots, x_n, y) = 1\}.$$

A fenti alapfüggvények és a bevezetett operátorok segítségvel már definiálható a parciális rekurzív függvények halmaza.

28. DEFINÍCIÓ: PARCIÁLIS REKURZÍV FÜGGVÉNY
Az $f : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}^n \, (n, m \in \mathbb{N})$ függvény akkor és csak akkor parciális rekurzív, ha az alábbiak egyike teljesül:

- f az alapfüggvények valamelyike
- f kifejezhető a fenti operátorok parciális rekurzív függvényekre történő alkalmazásával.

7.4.2. A parciális rekurzív függvények kiszámítása

Ahhoz, hogy a fenti függvényeket kiszámító programokat tudjunk adni, definiálnunk kell az ilyen függvények által meghatározott feladatot. Legyen $f : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}^n$ egy tetszőleges függvény (m, n rögzített). Az f által meghatározott feladat specifikációja:

$$A = \underset{x_1}{\mathbb{N}} \times \ldots \times \underset{x_m}{\mathbb{N}} \times \underset{y_1}{\mathbb{N}} \times \ldots \times \underset{y_m}{\mathbb{N}}$$
$$B = \underset{x'_1}{\mathbb{N}} \times \ldots \times \underset{x'_m}{\mathbb{N}}$$
$$Q : (x_1 = x'_1 \wedge \dots \wedge x_m = x'_m \wedge (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{D}_f)$$
$$R : (Q \wedge (y_1, \dots, y_n) = f(x'_1, \dots, x'_m))$$

Most megmutatjuk, hogy minden parciális rekurzív függvény által meghatározott feladat megoldható “jól konstruált” programmal (jól konstruáltnak tekintünk egy programot, ha elemi programokból a fenti három konstrukcióval megkapható). A bizonyításhoz csak annyit kell feltételeznünk, hogy az alapfüggvények kiszámíthatók (megengedett) elemi programokkal.

A fenti feltételezést felhasználva elegendő azt megmutatni, hogy az elemi függvény-operátorok (kompozíció, unió, rekurzió, μ-operátor) kiszámíthatók jól konstruált programokkal.

Kompozíció

Legyen $f \in \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}^n$ és $g \in \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^k$. Ekkor az $g \circ f$ által meghatározott feladat specifikációja:

$$A = \underset{x_1}{\mathbb{N}} \times \ldots \times \underset{x_m}{\mathbb{N}} \times \underset{y_1}{\mathbb{N}} \times \ldots \times \underset{y_k}{\mathbb{N}}$$
$$B = \underset{x'_1}{\mathbb{N}} \times \ldots \times \underset{x'_m}{\mathbb{N}}$$

$Q : (x_1 = x'_1 \wedge \dots \wedge x_m = x'_m \wedge (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{D}_{g \circ f})$
$R : (Q \wedge (y_1, \dots, y_n) = (g \circ f)(x'_1, \dots, x'_m))$

Jelöljük $z_1, \dots, z_n := f(x_1, \dots, x_m)$-mel azt a programot, amely kiszámítja f-et, és hasonlóan $y_1, \dots, y_k := g(z_1, \dots, z_n)$-nel azt, amelyik kiszámítja g-t. Tegyük fel, hogy ez a két program vagy elemi értékadás, vagy jól konstruált program. Ebben az esetben a két program szekvenciája kiszámítja $g \circ f$-et, azaz megoldja a fent specifikált feladatot. Legyen Q' a második program R utófeltételhez tartozó leggyengébb előfeltétele:

$Q' : (Q \wedge g(z_1, \dots, z_n) = (g \circ f)(x'_1, \dots, x'_m) \wedge (z_1, \dots, z_n) \in \mathcal{D}_g)$

Most vizsgáljuk meg az első program ezen Q' utófeltételhez tartozó leggyengébb előfeltételét:

$$\begin{aligned} lf(z_1, \dots, z_n := f(x_1, \dots, x_m), Q') = (Q \wedge g(f(x_1, \dots, x_m)) = \\ (g \circ f)(x'_1, \dots, x'_m) \wedge f(x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{D}_g \wedge (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{D}_f) \end{aligned}$$

Könnyen látható, hogy ez a leggyengébb előfeltétel következik Q-ból, és így a szekvencia levezetési szabálya és a specifikáció tételének alkalmazásával beláttuk, hogy a

$z_1, \dots, z_n := f(x_1, \dots, x_m)$
$y_1, \dots, y_k := g(z_1, \dots, z_n)$

program megoldja a fent specifikált feladatot, azaz kiszámítja f és g kompozícióját.

Unió

Legyen $k \in \mathbb{N}$ rögzített, és $\forall i \in [1..k] : f_i \in \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}^{n_i}$. Ekkor az e függvények uniója által meghatározott feladat specifikációja:

$$\begin{aligned} A = {} & \underset{x_1}{\mathbb{N}} \times \dots \times \underset{x_m}{\mathbb{N}} \times \\ & \times \underset{y_{1_1}}{\mathbb{N}} \times \dots \times \underset{y_{1_{n_1}}}{\mathbb{N}} \\ & \vdots \\ & \times \underset{y_{k_1}}{\mathbb{N}} \times \dots \times \underset{y_{k_{n_k}}}{\mathbb{N}} \\ B = {} & \underset{x'_1}{\mathbb{N}} \times \dots \times \underset{x'_m}{\mathbb{N}} \end{aligned}$$

$Q : (x_1 = x'_1 \wedge \dots \wedge x_m = x'_m \wedge (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{D}_{(f_1, \dots, f_k)})$
$R : (Q \wedge (y_{1_1}, \dots, y_{1_{n_1}} \dots y_{k_1}, \dots, y_{k_{n_k}}) = (f_1, \dots, f_k)(x'_1, \dots, x'_m))$

Tegyük fel, hogy a komponens függvények kiszámíthatók jól konstruált programmal, vagy elemi értékadással. Jelölje $y_{i_1}, \dots, y_{i_{n_i}} := f_i(x_1, \dots, x_m)$ az i-edik függvényt ($1 \leq i \leq k$) kiszámító programot. Ekkor ezeknek a programoknak a szekvenciája megoldja a fenti feladatot. Legyen Q_k a k-adik program R utófeltételhez tartozó leggyengébb előfeltételét:

$$\begin{aligned} Q_k : (Q \wedge (y_{1_1}, \dots, y_{1_{n_1}} \dots y_{k-1_1}, \dots, y_{k-1_{n_{k-1}}}, f_k(x_1, \dots, x_m)) = \\ (f_1, \dots, f_k)(x'_1, \dots, x'_m) \wedge (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{D}_{f_k}) \end{aligned}$$

Továbbá minden $i \in [1..k-1]$ esetén jelölje Q_i az i-edik program Q_{i+1}-hez tartozó leggyengébb előfeltételét. Könnyen látható, hogy az értékadás leggyengébb előfeltételére vonatkozó szabályt alkalmazva:

$$\begin{aligned}Q_1 : (Q \wedge (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_k(x_1, \dots, x_m)) = (f_1, \dots, f_k)(x'_1, \dots, x'_m) \wedge \\ (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{D}_{f_1} \wedge \dots \wedge (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{D}_{f_k})\end{aligned}$$

Ha most Q-t és Q_1-et összehasonlítjuk, észrevehetjük, hogy megegyeznek. A szekvencia levezetési szabálya és a specifikáció tétele alapján a

$y_{1\,1}, \dots, y_{1\,n_1} := f_1(x_1, \dots, x_m)$
$\vdots$
$y_{k\,1}, \dots, y_{k\,n_k} := f_k(x_1, \dots, x_m)$

program megoldása a fent specifikált feladatnak, azaz kiszámítja $(f_1, \dots, f_k)$-t.

Rekurzió

Legyen n rögzített, $f \in \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ és $g \in \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$. Tegyük fel, hogy mindketten kiszámíthatók jól konstruált programokkal vagy egyszerű értékadásokkal. Az f függvény g szerinti rekurziója által meghatározott feladat specifikációja:

$$\begin{array}{lllll} A = & \mathbb{N} & \times \dots \times & \mathbb{N} & \times\ \mathbb{N} \\ & x_1 & & x_{n+1} & \quad y \\ B = & \mathbb{N} & \times \dots \times & \mathbb{N} & \\ & x'_1 & & x'_{n+1} & \end{array}$$

$$Q : (x_1 = x'_1 \wedge \dots \wedge x_{n+1} = x'_{n+1} \wedge (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathcal{D}_{\varrho(f,g)})$$
$$R : (Q \wedge y = \varrho(f,g)(x'_1, \dots, x'_{n+1}))$$

Jelölje az f-et és a g-t kiszámító programot $y := f(x_1, \dots, x_n)$ illetve $y := g(x_1, \dots, x_{n+2})$. Oldjuk meg a feladatot egy olyan ciklussal, amelynek invariáns tulajdonsága:

$$P : (Q \wedge k \in [1..x_{n+1}] \wedge y = \varrho(f,g)(x'_1, \dots, x_n, k))$$

A ciklus levezetési szabályát vizsgálva azt találjuk, hogy Q-ból nem következik P. Ezért adunk egy olyan Q' feltételt, amelyből már következik P, és adunk egy programot, amely Q-ból Q'-be jut (így a megoldóprogram egy szekvencia lesz, amelynek második része egy ciklus). Legyen Q' az alábbi:

$$P : (Q \wedge k = 1 \wedge y = f(x_1, \dots, x_n))$$

Ez a $k, y := 1, f(x_1, \dots, x_n)$ szimultán értékadással elérhető. Az értékadás leggyengébb előfeltételére vonatkozó szabály felhasználásával könnyen látható, hogy az következik Q-ból.

A ciklus levezetési szabályának második pontja alapján a ciklusfeltétel $k \neq x_{n+1}$ lesz.

A harmadik pontnak megfelelően válasszuk a $t = x_{n+1} - k$ kifejezést termináló függvénynek.

Az ötödik pont azt írja le, hogy az imént definiált termináló fügvény értékének a ciklusmagban csökkennie kell. Ez elérhető a k eggyel való növelésével.

A négyes pont kielégítéséhez vizsgáljuk meg, hogy mi lesz a leggyengébb előfeltétele a k-t növelő értékadásnak a P-re vonatkozóan.

$$\begin{aligned} Q'' = lf(k := k+1, P) \quad &= \quad (Q \wedge k+1 \in [1..x_{n+1}] \ \wedge \\ &\qquad y = \varrho(f,g)(x'_1, \dots, x'_n, k+1)). \end{aligned}$$

Most már – a szekvencia levezetési szabálya alapján – csak egy olyan programot kell találnunk, amelyre $P \wedge (k \neq x_{n+1}) \Rightarrow lf(S, Q'')$. Ez a program a rekurzió definíciójához illeszkedően épp $y := g(x_1, \dots, x_n, k, y)$ lesz.

Így a szekvencia és a ciklus levezetés szabálya valamint a specifikáció tétele garantálja, hogy a

$k, y := 1, f(x_1, \dots, x_n)$
$k \neq x_{n+1}$
$y := g(x_1, \dots, x_n, k, y)$
$k := k+1$

program megoldja a $\varrho(f,g)$ által meghatározott feladatot, azaz kiszámítja f g szerinti rekurzióját.

μ-operátor

Legyen $f \in \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$, és tegyük fel, hogy f kiszámítható egyszerű értékadással vagy jól konstruált programmal. Tekintsük a $\mu(f)$ által meghatározott feladatot:

$$\begin{aligned} A &= \underset{x_1}{\mathbb{N}} \times \ldots \times \underset{x_n}{\mathbb{N}} \times \underset{y}{\mathbb{N}} \\ B &= \underset{x'_1}{\mathbb{N}} \times \ldots \times \underset{x'_n}{\mathbb{N}} \end{aligned}$$

$Q : (x_1 = x'_1 \wedge \dots \wedge x_n = x'_n \wedge (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathcal{D}_{\mu(f)})$

$R : (Q \wedge y = \mu(f)(x'_1, \dots, x'_n))$

Jelölje $z := f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ az f-et kiszámító programot. Oldjuk meg a feladatot egy olyan ciklussal, melynek invariánsa:

$P : (Q \wedge z = f(x_1, \dots, x_n, y) \wedge \forall i \in [1..y-1] : f(x_1, \dots, x_n, i) \neq 1)$

Az invariáns a $z, y := f(x_1, \dots, x_n, 1), 1$ szimultán értékadással teljesíthető. Könnyen látható, hogy ennek a programnak a P-re vonatkozó leggyengébb előfeltétele

$$\begin{aligned} lf(z, y := f(x_1, \dots, x_n, 1), 1; P) \quad &= \quad (Q \wedge f(x_1, \dots, x_n, 1) = f(x_1, \dots, x_n, 1) \\ &\qquad \wedge \forall i \in [1..1-1] : f(x_1, \dots, x_n, i) \neq 1) \end{aligned}$$

következik Q-ból. A ciklus levezetési szabályának második pontja alapján a ciklusfeltétel $z \neq 1$ lesz.

A feladat előfeltétele garantálja, hogy van olyan $m \in \mathbb{N}$ szám, amelyre $f(x_1, \dots, x_n, m) = 1$ fennáll. Legyen N egy ilyen tulajdonságú, rögzített természetes szám. Ennek az értéknek a segítségével definiálhatjuk a termináló függvényt: $t = N - y$. Ez kielégíti a levezetés szabály harmadik pontját.

Az ötödik pont megkívánja, hogy a termináló függvény a ciklusmag lefutása során csökkenjen. Ezt elérhetjük y eggyel való növelésével.

A negyedik pont teljesítéséhez legyen Q' ennek a növelésnek a P-re vonatkozó leggyengébb előfeltétele:

$$Q' : (Q \wedge z = f(x_1, \dots, x_n, y+1) \wedge \forall i \in [1..y-1] : f(x_1, \dots, x_n, i) \neq 1)$$

Most már csak találnunk kell egy programot a $P \wedge (z \neq 1)$ és Q' állítások közé. A $z := f(x_1, \dots, x_n, y+1)$ értékadásra teljesül, hogy

$$P \wedge (z \neq 1) \Rightarrow lf(z := f(x_1, \dots, x_n, y+1), Q').$$

A specifikáció tétele, valamint a ciklus és a szekvencia levezetési szabálya garantálja, hogy a

$z, y := f(x_1, \dots, x_n, 1), 1$	
$z \neq 1$	
	$z := f(x_1, \dots, x_n, y+1)$
	$y := y+1$

program megoldja a $\mu(f)$ által meghatározott feladatot, azaz kiszámítja $\mu(f)$-et.

7.4.3. Következmény

Az előzőekben megmutattuk, hogy ha az alapfüggvények kiszámíthatók egyszerű értékadással, akkor a belőlük – a parciális rekurzív függvényeknél megengedett – operátorokkal felépített függvények kiszámíthatók jól konstruált programokkal. A Church tézis szerint a kiszámítható függvények halmaza megegyezik a parciális rekurzív függvények halmazával. Ezek alapján kimondhatjuk az alábbi tételt:

17. TÉTEL: STRUKTURÁLT PROGRAMOZÁS ÉS KISZÁMÍTHATÓSÁG
Minden kiszámítható függvény kiszámítható egy jól konstruált programmal.

7.4.4. Relációk

Eljutván az előző tételhez, fordítsuk most figyelmünket a relációk felé. Ahhoz, hogy a relációk kiszámíthatóságát megvizsgálhassuk, definiálnunk kell a kiszámítható reláció fogalmát.

29. DEFINÍCIÓ: REKURZÍVAN FELSOROLHATÓ RELÁCIÓ
Legyen $R \subseteq \mathbb{N}^k \times \mathbb{N}^k$ tetszőleges reláció. R akkor és csak akkor rekurzívan felsorolható, ha van olyan $f \in \mathbb{N}^{2k} \to \mathbb{N}$ parciális rekurzív függvény, amelynek értelmezési tartományára: $\mathcal{D}_f = R$.

A kiszámíthatóság-elmélethez igazodva, a továbbiakban csak rekurzívan felsorolható relációkkal fogunk foglalkozni. Ahhoz, hogy megmutassuk, hogy minden kiszámítható (rekurzívan felsorolható) feladat – emlékezzünk, hogy minden feladat egy reláció – megoldható strukturált programmal, először megadjuk a rekurzívan felsorolható relációk egy másik jellemzését.

18. TÉTEL: KLEENE[1936]
Ha R egy tetszőleges reláció, akkor az alábbi három állítás ekvivalens:

(1) R rekurzívan felsorolható

(2) R egy f parciális rekurzív függvény értékkészlete

(3) $R = \emptyset$ vagy R egy φ rekurzív függvény értékkészlete.

Ennek a tételnek a bizonyítása lásd Ref??? konstruktív, azaz megadja mind f, mind pedig φ felépítését. Mi ezt a φ függvényt fogjuk használni a kiszámítható feladatunk megoldóprogramjában.

Legyen $F \subseteq \mathbb{N}^k \times \mathbb{N}^k$ egy rekurzívan felsorolható reláció, és jelölje φ az előző tétel konstrukciójával kapott (totális) rekurzív függvényt. Specifikáljuk a feladatot az alábbi módon:

$$A = \underset{x}{\mathbb{N}^k} \times \underset{y}{\mathbb{N}^k}$$

$$B = \underset{x'}{\mathbb{N}^k}$$

$$Q : (x = x' \wedge x \in \mathcal{D}_F)$$

$$R : (Q \wedge (x, y) \in F)$$

Ez a feladat megoldható egy olyan ciklussal, amelynek invariáns tulajdonsága:

$$P : (Q \wedge i \in \mathbb{N} \wedge (z, y) = \varphi(i))$$

A ciklus levezetési szabályának felhasználásával könnyen belátható, hogy az alábbi program megoldása a fenti feladatnak:

$i, (z, y) := 1, \varphi(1)$	
$z \neq x$	
	$(z, y) := \varphi(i + 1)$
	$i := i + 1$

A bizonyításban a termináló függvény megadásánál ugyanazt a technikát alkalmazzuk, mint a μ-operátornál.

Ezzel az előzőleg függvényekre kimondott tételünket általánosíthatjuk relációkra:

19. TÉTEL: STRUKTURÁLT PROGRAMOZÁS ÉS KISZÁMÍTHATÓ RELÁCIÓK
Minden kiszámítható reláció kiszámítható egy jól konstruált programmal.

Megjegyzés

Az egyetlen feltevés, amit a fenti meggondolásokban használtunk az volt, hogy az alapfüggvények kiszámíthatóak. Így aztán ezek az eredmények kiterjeszthetők a relatíve kiszámítható függvények (ugyanezen operátorokkal egy tetszőleges alaphalmazból képzett függvények), vagy a parciális rekurzív funkcionálok halmazára is (Ref[1, page 174]).