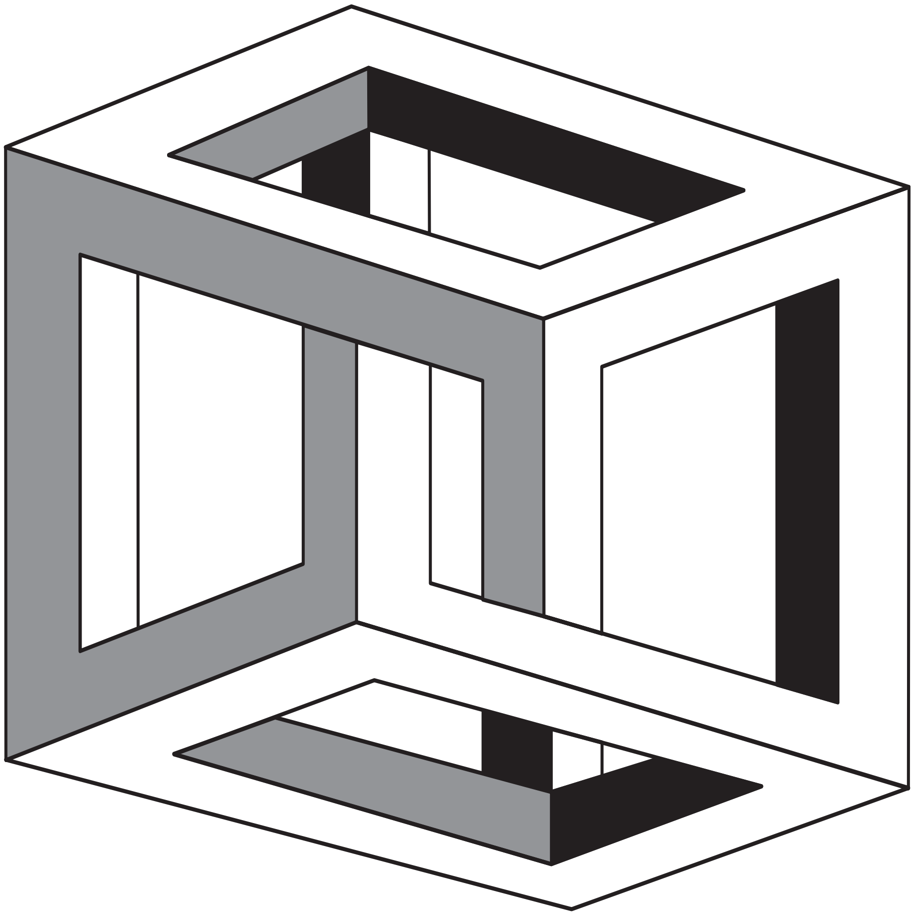
Fóthi Ákos, Steingart Ferenc

Bevezetés a programozáshoz

EGYETEMI JEGYZET



Minden észrevételt, amely valamilyen hibára vonatkozik örömmel fogadunk.

Budapest, 2002. szeptember 30.

A SZERZŐK

ELTE PROG-MAT.
2000-2001

Tartalomjegyzék

1.

Alapfogalmak

Ahhoz, hogy bármiről érdemben beszélhessünk, meg kell állapodnunk egy jelölésrendszerben. Az alábbiakban bevezetjük azokat a jelöléseket és alapvető definíciókat amelyeket a továbbiakban gyakran fogunk használni.

1.1. Alaphalmazok

Először bevezetjük a matematikában gyakran használt számhalmazok jelöléseit.

$\mathbb{N}$	–	a természetes számok halmaza,
$\mathbb{N}_0$	–	a nemnegatív egészek halmaza,
$\mathbb{Z}$	–	az egész számok halmaza,
$\mathbb{Q}$	–	a racionális számok halmaza,
$\mathbb{R}$	–	a valós számok halmaza,
$\mathbb{C}$	–	a komplex számok halmaza,
$\mathbb{L}$	–	a logikai értékek halmaza,
		$\mathbb{L} = \{igaz, hamis\}$,
$\emptyset$	–	az üres halmaz.

Vegyük észre, hogy a természetes számok halmazát ($\mathbb{N}$) és a nemnegatív egészek halmazát ($\mathbb{N}_0$) külön jelöljük. Ennek az az oka, hogy az általunk használt jelölésrendszerben a természetes számok hamaza nem tartalmazza a nullát.

Megjegyezzük továbbá, hogy $[a..b]$-vel fogjuk jelölni, a valós $[a, b]$ intervallum egész elemeinek halmazát, azaz

$$[a..b] = [a, b] \cap \mathbb{Z}.$$

Természetesen használni fogjuk a matematikában megszokott halmazelméleti műveleteket:

$\cup$	–	unió,
$\cap$	–	metszet,

és relációkat:

$$\begin{array}{lll} \in & - & \text{eleme,} \\ \subseteq & - & \text{részhalmaza,} \\ \subset & - & \text{valódi része.} \end{array}$$

1.2. Sorozatok

Ha A egy adott halmaz, akkor az $\alpha =< \alpha_1, \alpha_2, \cdots >$, $\alpha_i \in A$ egy A-beli véges, vagy végtelen sorozatot jelöl.

Az A-beli véges sorozatokat $\alpha =< \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n >$, $\alpha_i \in A$ alakban írhatjuk le. A véges sorozat hosszát $|\alpha|$ jelöli.

Az A-beli véges sorozatok halmazát A^*-gal, a végtelen sorozatok halmazát A^∞-nel jelöljük. Az előző két halmaz uniójaként előálló A-beli véges, vagy végtelen sorozatok halmazát A^{**}-gal jelöljük.

Egy $\alpha \in A^{**}$ sorozatat értelmezési tartományát $\mathcal{D}_\alpha$-val jelöljük, és a következő halmazt értjük rajta:

$$\mathcal{D}_\alpha = \begin{cases} [1..|\alpha|], & \text{ha } \alpha \in A^* \\ \mathbb{N}, & \text{ha } \alpha \in A^\infty \end{cases}$$

Legyenek $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1} \in A^*$ és $\alpha^n \in A^{**}$. Ekkor azt a sorozatot, amit az $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}, \alpha^n$ sorozatok egymás után írásával kapunk, a fenti sorozatok *konkatenációjának* nevezzük, és $kon(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}, \alpha^n)$-nel jelöljük.

Egy A^{**}-beli sorozat *redukáltjának* nevezzük azt a sorozatot, amit úgy kapunk, hogy az eredeti sorozat minden azonos elemekből álló véges részsorozatát a részsorozat egyetlen elemével helyettesítjük. Egy $\alpha \in A^{**}$ sorozat redukáltját $red(\alpha)$-ával jelöljük.

Bevezetjük még a τ függvényt, ami egy véges sorozathoz hozzárendeli annak utolsó elemét: $\tau : A^* \to A, \forall \alpha \in A^*$:

$$\tau(\alpha) = \alpha_{|\alpha|}.$$

1.3. Direktszorzat

Legyenek $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n}$ tetszőleges halmazok, $I = \{i_1, \ldots, i_n\}$, $J = \{j_1, \ldots, j_m\}$, $J \subseteq I$ és $H = I \setminus J = \{h_1, \ldots, h_s\}$. Ekkor az

$$A = \mathop{\times}_{k=1}^{n} A_{i_k} = \{ (a_1, \ldots, a_n) \mid a_k \in A_{i_k}, k \in [1..n] \}$$

direktszorzatnak a

$$B = \mathop{\times}_{k=1}^{m} A_{j_k}$$

direktszorzat *altere* és a

$$B' = \mathop{\times}_{k=1}^{s} A_{h_k}$$

direktszorzat *kiegészítő altere*.

A $pr_B : A \to B$ függvényt *projekciónak* nevezzük, ha

$$\forall k \in [1..m] : pr_B(a)_k = a_l \text{ ahol } j_k = i_l.$$

A projekciót az alábbi módon kiterjesztjük terek direkt szorzatára, és sorozatterekre is: legyen A és B mint fent, $(a_1, a_2) \in A \times A$, illetve $\alpha \in A^{**}$. Ekkor

$$\begin{aligned} pr_B((a_1, a_2)) &= (pr_B(a_1), pr_B(a_2)) \in B \times B \\ pr_B(\alpha) &= \beta \in B^{**}, \text{ahol } \mathcal{D}_\beta = \mathcal{D}_\alpha \text{ és} \\ & \forall i \in \mathcal{D}_\beta : \beta_i = pr_B(\alpha_i) \end{aligned}$$

1.4. Relációk

Relációnak nevezzük egy tetszőleges direktszorzat tetszőleges részhalmazát. A továbbiakban csak olyan relációkkal foglalkozunk, amelyek kétkomponensű direktszorzat részei. Ezeket a relációkat *bináris relációknak* nevezzük.

Legyenek A és B tetszőleges halmazok, $R \subseteq A \times B$ pedig egy tetszőleges reláció. Ekkor a reláció *értelmezési tartománya*:

$$\mathcal{D}_R = \{a \in A \mid \exists b \in B : (a, b) \in R\},$$

a reláció *értékkészlete*:

$$\mathcal{R}_R = \{b \in B \mid \exists a \in A : (a, b) \in R\},$$

a reláció *értéke* egy adott helyen:

$$R(a) = \{b \in B \mid (a, b) \in R\},$$

egy $H \subseteq A$ halmaz R szerinti *képe*

$$R(H) = \{b \in B \mid \exists a \in H : (a, b) \in R\},$$

Azt mondjuk, hogy egy reláció *determinisztikus*,vagy *parciális függvény*, ha

$$\forall a \in A : |R(a)| \leq 1.$$

Függvénynek nevezünk egy relációt akkor, ha

$$\forall a \in A : |R(a)| = 1.$$

Legyen $R \subseteq A \times B$. Ekkor az $R^{(-1)}$ reláció az R *inverze*, ha

$$R^{(-1)} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in R\}.$$

Legyen $H \subseteq B$ tetszőleges halmaz. Ekkor az

$$R^{(-1)}(H) = \{a \in A \mid R(a) \cap H \neq \emptyset\}$$

halmazt a H halmaz R reláció szerinti *inverz képének* nevezzük. Vegyük észre, hogy az inverz kép fogalma megegyezik az inverz reláció szerinti kép fogalmával. Ugyanekkor az

$$R^{-1}(H) = \{a \in \mathcal{D}_R \mid R(a) \subseteq H\}$$

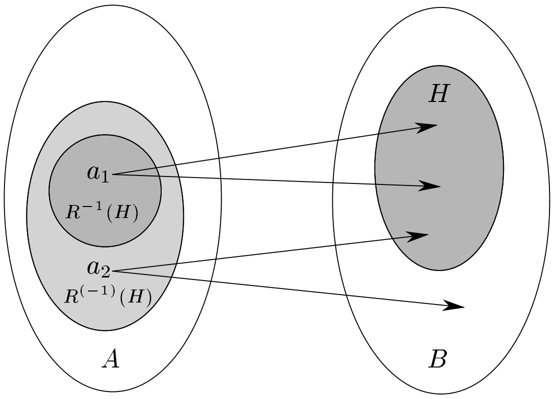
halmazt a H halmaz R reláció szerinti *ősképének* nevezzük. Vegyük észre, hogy az őskép mindig része inverz képnek. A két kép kapcsolatát mutatja az alábbi ábra:

A relációk között értelmezünk műveleteket is. Legyen $P \subseteq A \times B$ és $Q \subseteq B \times C$. Ekkor az $R \subseteq A \times C$ relációt a P és Q relációk *kompozíciójának* nevezzük, ha

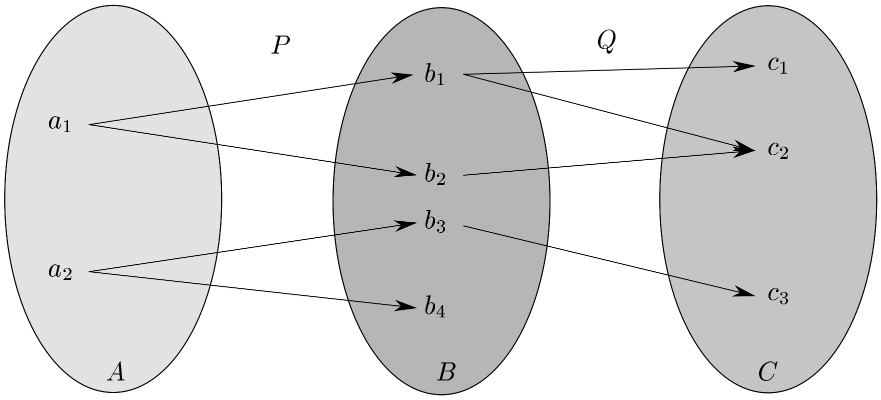
$$R = Q \circ P = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B : (a, b) \in P \wedge (b, c) \in Q\}.$$

Az $S \subseteq A \times C$ relációt a P és Q relációk *szigorú kompozíciójának* nevezzük, ha

$$S = Q \odot P = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B : (a, b) \in P \wedge (b, c) \in Q \wedge P(a) \subseteq \mathcal{D}_Q\}.$$



1.1. ábra. Inverz kép és őskép



1.2. ábra. Kompozíció és szigorú kompozíció

1.4.1. Logikai relációk

Az $R \subseteq A \times \mathbb{L}$ típusú relációkat – ahol A tetszőleges halmaz –, logikai relációknak nevezzük. A logikai relációkra bevezetünk néhány jelölést:

Legyen $R \subseteq A \times \mathbb{L}$. Ekkor az R *gyenge igazsághalmaza:*

$$\lfloor R \rfloor = R^{(-1)}(\{igaz\}),$$

erős igazsághalmaza:

$$\lceil R \rceil = R^{-1}(\{igaz\}).$$

Vegyük észre, hogy ha R függvény, akkor az erős és gyenge igazsághalmaz megegyezik. A függvényekre alkalmazott igazsághalmaz-képzésnek van egy inverz művelete, a karakterisztikus függvény megadása: legyen $H \subseteq A$. Ekkor a $\mathcal{P}(H) : A \to \mathbb{L}$ függvény a H halmaz karakterisztikus függvénye, ha

$$\lceil \mathcal{P}(H) \rceil = H.$$

A fenti definíciókból következik, hogy tulajdonképpen mindegy, hogy egy halmaz részhalmazairól, vagy a halmazon értelmezett logikai függvényekről (állításokról) beszélünk, hiszen ezen fogalmak kölcsönösen egyértelműen megfelelnek egymásnak.

1.4.2. Lezárt, korlátos lezárt

Legyen $R \subseteq A \times A$ egy homogén reláció. A *reláció nulladik hatványa*:

$$R^0 = \{(a, a) \mid a \in A\}.$$

A *reláció n-edik hatványa*, $n \in \mathbb{N}$:

$$R^n = R^{n-1} \circ R.$$

Az $R \subseteq A \times A$ reláció *lezártja* az az $\overline{R} \subseteq A \times A$ reláció, amelyre:

- $\mathcal{D}_{\overline{R}} = \{a \in A \mid \nexists \alpha \in A^\infty : \alpha_1 \in R(a) \wedge \forall i \in \mathbb{N} : \alpha_{i+1} \in R(\alpha_i)\}$ és
- $\forall a \in \mathcal{D}_{\overline{R}} : \overline{R}(a) = \{b \in A \mid \exists k \in \mathbb{N}_0 : b \in R^k(a) \wedge b \notin \mathcal{D}_R\}$.

A lezárt tehát olyan pontokban van értelmezve, amelyekből kiindulva a relációt nem lehet végtelen sokszor egymás után alkalmazni, és ezekhez a pontokhoz olyan pontokat rendel, amelyeket úgy kapunk, hogy a reláció véges sokszori alkalmazásával kikerülünk az eredeti reláció értelmezési tartományából. Tehát $\mathcal{D}_R \cap \mathcal{R}_{\overline{R}} = \emptyset$ mindig teljesül.

Az $R \subseteq A \times A$ reláció *korlátos lezártja* az az $\overline{\overline{R}} \subseteq A \times A$ reláció, amelyre:

- $\mathcal{D}_{\overline{\overline{R}}} = \{a \in A \mid \exists k_a \in \mathbb{N}_0 : R^{k_a}(a) = \emptyset\}$ és
- $\forall a \in \mathcal{D}_{\overline{\overline{R}}} : \ \overline{\overline{R}}(a) = \overline{R}(a)$.

Vegyük észre, hogy egy reláció lezártja, és korlátos lezártja különbözhet. A definíciókból látható, hogy ez a különbözőség csak az értelmezési tartományok között jelentkezhet. Ennek azonban szükséges feltétele, hogy egy alkalmas pontból kiindulva a relációt ne lehessen végtelen sokszor alkalmazni, de a véges sokszori alkalmazások hosszára ne tudjunk korlátot mondani. Természetesen ez csak akkor lehetséges, ha végtelen sok véges alkalmazás-sorozatot tudunk a pontból indítani. Nézzünk erre egy egyszerű példát: legyen $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, és

$$R(a) = \begin{cases} \{a-1\}, & \text{ha } a > 0 \\ \mathbb{N}, & \text{ha } a < 0 \end{cases}$$

Ekkor $\mathbb{Z} = \mathcal{D}_{\overline{R}} \neq \mathcal{D}_{\overline{\overline{R}}} = \mathbb{N}_0$.

Legyen $R \subseteq A \times A$ és $\pi : A \to \mathbb{L}$. A

$$R|_\pi = (R \cap (\lceil \pi \rceil \times A)) \cup \{(a, a) \in A \times A \mid a \in \lceil \pi \rceil \setminus \mathcal{D}_R\}$$

relációt *feltételes reláció*nak nevezzük.

Vegyük észre, hogy egy feltételes reláció nem ugyanaz, mint a reláció leszűkítése a feltétel igazsághalmazára, azaz $R|_\pi \neq R|_{\lceil \pi \rceil}$! Továbbá fontos megjegyezni, hogy a feltételes reláció értelmezési tartománya mindig a feltétel igazsághalmaza, azaz $\mathcal{D}_{R|_\pi} = \lceil \pi \rceil$.

A továbbiakban egy feltételes reláció lezártját illetve korlátos lezártját a reláció *feltételre vonatkozó lezártjának* illetve *feltételre vonatkozó korlátos lezártjának* fogjuk nevezni.

1.5. Példák

1. példa: Írjuk fel az $A \times B$, $A \times C$, $(A \times B) \times C$, és $A \times B \times C$ halmazok elemeit, ha $A = \{0, 1\}, B = \{1, 2, 3\}, C = \{p, q\}$!
Megoldás:

$$\begin{aligned}
A \times B =& \{(0,1),(0,2),(0,3),(1,1),(1,2),(1,3)\},\\
A \times C =& \{(0,p),(0,q),(1,p),(1,q)\},\\
(A \times B) \times C =& \{((0,1),p),((0,2),p),((0,3),p),((1,1),p),((1,2),p),((1,3),p),\\
& ((0,1),q),((0,2),q),((0,3),q),((1,1),q),((1,2),q),((1,3),q)\},\\
A \times B \times C =& \{(0,1,p),(0,2,p),(0,3,p),(1,1,p),(1,2,p),(1,3,p),\\
& (0,1,q),(0,2,q),(0,3,q),(1,1,q),(1,2,q),(1,3,q)\}.
\end{aligned}$$

2. példa: Legyen $R \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$$R = \{(1,2),(1,4),(2,1),(3,4),(3,3),(3,5),(4,5)\}.$$

a) Mi a reláció értelmezési tartománya és értékkészlete?
b) Determinisztikus-e, ill. függvény-e a reláció?
c) Mi R $0., 2., (-1).$ hatványa?
d) Mi a $\{4, 5\}$ halmaz inverz képe, ill. őségképe?

Megoldás:

a) $\mathcal{D}_R = \{1, 2, 3, 4\}$,
$\mathcal{R}_R = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

b) A reláció nem determinisztikus, ugyanis pl. $|R(1)| = 2!$ Mivel a reláció nem determinisztikus, függvény sem lehet.

c) A reláció 0. hatványa az identikus leképezés, azaz:

$$R^0 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}.$$

Mivel $R^2 = R \circ R$, azt kell megvizsgálnunk, hogy mely pontokból hogyan lehet a relációt egymás után kétszer alkalmazni:

$$\begin{array}{ccc}
(1,2) & \longrightarrow & (2,1)\\
(1,4) & \longrightarrow & (4,5)\\
(2,1) & \longrightarrow & (1,2)\\
(2,1) & \longrightarrow & (1,4)\\
(3,4) & \longrightarrow & (4,5)\\
(3,3) & \longrightarrow & (3,4)\\
(3,3) & \longrightarrow & (3,3)\\
(3,3) & \longrightarrow & (3,5)
\end{array}$$

A fenti táblázat alapján:

$$R^2 = \{(1,1),(1,5),(2,2),(2,4),(3,5),(3,4),(3,3)\}.$$

$R^{(-1)}$ a reláció inverzének definíciója alapján:

$$R = \{(2,1),(4,1),(1,2),(4,3),(3,3),(5,3),(5,4)\}.$$

d) Írjuk fel, hogy mit rendel a reláció az értelmezési tartomány egyes pontjaihoz:

$$\begin{aligned} R(1) &= \{2,4\} \\ R(2) &= \{1\} \\ R(3) &= \{3,4,5\} \\ R(4) &= \{5\} \end{aligned}$$

Az inverz kép definíciója alapján:

$$R^{(-1)}(\{4,5\} = \{1,3,4\}.$$

Az őskép definíciója alapján:

$$R^{-1}(\{4,5\} = \{4\}.$$

3. példa: Megadható-e valamilyen összefüggés egy H halmaz inverz képének képe, és a H halmaz között?
Megoldás: Legyen $R \subseteq A \times B$, $H \subseteq B$. Ekkor

$$\begin{aligned} R(R^{(-1)}(H)) &= R(\{a \in A \mid R(a) \cap H \neq \emptyset\}) = \\ &= \bigcup_{R(a) \cap H \neq \emptyset} R(a). \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy általános esetben nem tudunk mondani semmit a két halmaz viszonyáról, ugyanis

i.) ha $H \not\subseteq \mathcal{R}_R$, akkor $H \not\subseteq R(R^{(-1)}(H))$ és

ii.) ha $\exists a \in R^{(-1)}(H) : R(a) \not\subseteq H$, akkor $R(R^{(-1)}(H)) \not\subseteq H$.

Tekintsük e fenti esetet egy egyszerű számpéldán: Legyen $A = B = \{1,2,3\}$, $R = \{(1,1),(1,2)\}$. Ekkor $H = \{2,3\}$ esetén $R(R^{(-1)}(H)) = \{1,2\}$, azaz egyik irányú tartalmazkodás sem áll fenn.

4. példa: Legyen $R \subseteq A \times B$, $P, Q \subseteq B$. Hogyan lehetne jellemezni az $R^{-1}(P \cup Q)$ és az $R^{-1}(P \cap Q)$ halmazt az $R^{-1}(P)$ és $R^{-1}(Q)$ halmaz segítségével?
Megoldás:

$$\begin{aligned} R^{-1}(P \cup Q) &= \{a \in \mathcal{D}_R \mid R(a) \subseteq (P \cup Q)\} = \\ &\supseteq \{a \in \mathcal{D}_R \mid R(a) \subseteq P\} \cup \{a \in \mathcal{D}_R \mid R(a) \subseteq Q\}. \end{aligned}$$

A másik irányú tartalmazkodás sajnos nem áll fenn, ugyanis lehet olyan $a \in \mathcal{D}_R$ amelyre

$$R(a) \not\subseteq P, \text{ és } R(a) \not\subseteq Q, \text{ de } R(a) \subseteq P \cup Q.$$

Nézzük ezt egy számpéldán: Legyen $A = B = \{1,2\}$, $R = \{(1,1),(1,2)\}$, $P = \{1\}$, $Q = \{2\}$. Ekkor $R^{-1}(P)$ és $R^{-1}(Q)$ üres, de $R^{-1}(P \cup Q) = \{1\}$.
Vizsgáljuk most meg a metszetet!

$$\begin{aligned} R^{-1}(P \cap Q) &= \{a \in \mathcal{D}_R \mid R(a) \subseteq (P \cap Q)\} = \\ &= \{a \in \mathcal{D}_R \mid R(a) \subseteq P\} \cap \{a \in \mathcal{D}_R \mid R(a) \subseteq Q\} = \\ &= R^{-1}(P) \cap R^{-1}(Q). \end{aligned}$$

Tehát bebizonyítottuk, hogy két tetszőleges halmaz metszetének őse képe egyenlő a két halmaz ősképének metszetével.

5. példa: Legyenek $F \subseteq A \times B, G \subseteq B \times C$. Igaz-e, hogy

$$(G \circ F)^{(-1)} = F^{(-1)} \circ G^{(-1)}?$$

Megoldás:

$$\begin{aligned}
(G \circ F)^{(-1)} &= \{(c,a) \in C \times A \mid \exists b \in B : (a,b) \in F \wedge (b,c) \in G\} = \\
&= \{(c,a) \in C \times A \mid \exists b \in B : (b,a) \in F^{(-1)} \wedge (c,b) \in G^{(-1)}\} = \\
&= F^{(-1)} \circ G^{(-1)}.
\end{aligned}$$

6. példa: Legyenek $F \subseteq A \times B, G \subseteq B \times C$. Igaz-e, hogy

$$(G \odot F)^{(-1)} = F^{(-1)} \odot G^{(-1)}?$$

Megoldás:

$$\begin{aligned}
(G \odot F)^{(-1)} &= \{(c,a) \in C \times A \mid \exists b \in B : (a,b) \in F \wedge (b,c) \in G \wedge \\
&\qquad\qquad \wedge F(a) \subseteq \mathcal{D}_G\} = \\
&= \{(c,a) \in C \times A \mid \exists b \in B : (b,a) \in F^{(-1)} \wedge (c,b) \in G^{(-1)} \wedge \\
&\qquad\qquad \wedge F(a) \subseteq \mathcal{D}_G\} = \\
&\neq \{(c,a) \in C \times A \mid \exists b \in B : (b,a) \in F^{(-1)} \wedge (c,b) \in G^{(-1)} \wedge \\
&\qquad\qquad \wedge G^{(-1)}(c) \subseteq \mathcal{D}_{F^{(-1)}}\} = \\
&= F^{(-1)} \odot G^{(-1)}.
\end{aligned}$$

Számpéldán szemléltetve: legyen $A = B = C = \{1,2\}$, $F = G = \{(1,1),(1,2)\}$. Ekkor

$$\begin{aligned}
(G \odot F)^{(-1)} &= \emptyset, \\
F^{(-1)} \odot G^{(-1)} &= \{(1,1),(2,1)\}.
\end{aligned}$$

7. példa: $W = N_1 \times N_2 \times N_3$. $\alpha \in W^{**}$, ahol $N_i = \mathbb{N}\ (i = 1,2,3)$. $\alpha_1 = (1,1,1)$. Az α sorozat további elemeit úgy kapjuk meg, hogy a pontok koordinátáit az első koordinátával kezdve ciklikusan 1-gyel növeljük. $red(pr_{N_1 \times N_3}(\alpha)) =?$
Megoldás: Írjuk fel először a sorozat első néhány tagját:

$$\alpha =< (1,1,1),(2,1,1),(2,2,1),(2,2,2),(3,2,2),(3,3,2) \cdots >$$

Az α sorozat projekciója $N_1 \times N_3$-ra:

$$pr_{N_1 \times N_3}(\alpha) =< (1,1),(2,1),(2,1),(2,2),(3,2),(3,2) \cdots >$$

A fenti sorozat redukáltja:

$$red(pr_{N_1 \times N_3}(\alpha)) =< (1,1),(2,1),(2,2),(3,2) \cdots >$$

A fentiekből jól látható, hogy a redukció pontosan azokat az elemeket hagyja ki a sorozatból, amelyekben a növelés a második komponensben történt, így az eredménysorozat elemeit is a koordináták ciklikus eggyel növelésével kapjuk meg, az $(1,1)$ pontból kiindulva.

1.6. Feladatok

1. Milyen összefüggés van egy H halmaz R relációra vonatkozó inverz képe és ősképe között? És ha R függvény?

2. $R = \{((x,y),(x+y,y)) \mid x,y \in \mathbb{N}\}$. Mi a $H = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{N} \wedge a+b < 5\}$ halmaz inverz képe, ill. ősképe?

3. $R = \{((x,y),(x+y,y)) \mid x,y \in \mathbb{N}\} \cup \{((x,y),(x-y,y)) \mid x,y \in \mathbb{N}\}$. Mi a $H = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{N} \wedge a+b < 5\}$ halmaz inverz képe, ill. ősképe?

4. $R = \{((x,y),(f(x,y),y)) \mid x,y \in \mathbb{N}\}$, ahol $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Mi a $H = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{N} \wedge a+b < 5\}$ halmaz ősképe ill. inverz képe?

5. $R \subseteq A \times B, Q \subseteq B$. Van-e valamilyen összefüggés az $R^{-1}(B \setminus Q)$ halmaz és az $A \setminus (R^{-1}(Q))$ halmaz között?

6. Készíts olyan nem üres relációt, amelyre igaz, hogy értékkészlete minden valódi részhalmazának ősképe üres halmaz!

7. Legyen $A = \{1,2,3,4,5\}, R \subseteq A \times A$, $R = \{(1,2),(1,4),(2,1),(3,4),(3,3),(3,5),(4,5)\}$, $f \subseteq A \times \mathbb{L}$ és $f = \{(1,i),(2,i),(3,i),(4,h),(5,i)\}$. Mi f, ill. $(f \circ R)$ igazsághalmaza?

8. $R, Q \subseteq A \times A$. Igaz-e, hogy $(R \odot Q)^{(-1)} = Q^{(-1)} \circ R^{(-1)}$?

9. $R \subseteq A \times A$. Igaz-e, hogy $(R^{(-1)})^2 = (R^2)^{(-1)}$?

10. $R \subseteq A \times A$. Igaz-e, hogy $\forall H \subseteq A : R^{-1}(R^{-1}(H)) = (R^2)^{-1}(H)$?

11. $P, Q \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. $Q = \{(a,b) \mid 2|a \wedge b|a \wedge \ prim(b)\}$.

    a) $P = \{(a,b) \mid b|a \wedge b \neq 1 \wedge b \neq a\}$
    b) $P = \{(a,b) \mid b|a\}$

    Add meg a $Q^{(-1)}, Q \circ P$ és $Q \odot P$-t relációt!

12. Legyen $Q, R, S \subseteq A \times A$, és vezessük be az alábbi jelölést: ha $X \subseteq A \times A$ tetszőleges reláció, akkor X komplementere:

    $$\widehat{X} = \{(a,b) \in A \times A \mid (a,b) \notin X\}.$$

    Igaz-e, hogy

    $$Q \odot R \subseteq S \Longleftrightarrow Q^{(-1)} \odot \widehat{S} \subseteq \widehat{R}?$$

    Igaz-e a fenti állítás nem-szigorú kompozíció esetén?

13. Legyen $Q, R, S \subseteq A \times A$. Igaz-e, hogy

    $$\begin{array}{lll} R \subseteq S & \Rightarrow & R \odot Q \subseteq S \odot Q, \\ R \subseteq S & \Rightarrow & Q \odot R \subseteq Q \odot S? \end{array}$$

14. Legyen R és Q két reláció a természetes számok halmazán! R egy természetes számhoz rendeli önmagát és a kétszeresét, Q egy páros természetes számhoz a felét.

a) Írd fel a két relációt, és add meg az értelmezési tartományukat!

b) Írd fel az R reláció k. hatványát ($k \geq 1$) és ennek az értelmezési tartományát!

c) Írd fel a $Q \circ R$ relációt és az értelmezési tartományát!

d) $F = Q \odot R$! Írd fel az F relációt és az értelmezési tartományát!

15. Legfeljebb ill. legalább milyen hosszú egy m és egy n hosszúságú sorozat redukáltjának konkatenációja, ill. konkatenációjának redukáltja?

16. Igaz-e, hogy egy α sorozat redukáltjának projekciója ugyanolyan hosszú, mint az α sorozat redukáltja?

17. Igaz-e, hogy egy α sorozat projekciójának redukáltja ugyanolyan hosszú, mint az α sorozat redukáltja?

18. Legyen $A = N_1 \times N_2 \times N_3 \times N_4$, $B = N_4 \times N_1$, ahol $N_i = \mathbb{N}$ $(i = 1..4)$.

$$\begin{aligned} \alpha \;\; = \;\; & <(1,1,1,1),(1,2,1,1),(1,2,3,1),(1,2,3,4), \\ & (5,2,3,4),(5,7,3,4),(5,7,10,4),\cdots> \end{aligned}$$

a) $pr_B(\alpha) =?$

b) $red(pr_B(\alpha)) =?$