

1. feladat

Adott az x vektor és a vele azonos értelmezési tartományú (lob-ot és hib-et, így dom-ot tekintve is meg-
egyező) y vektor. x elemei természetes számok és nincs köztük két egyforma.

- Fogalmazzuk meg szövegesen, hogy milyen feladatot old meg az alább specifikált feladat! 3 pont
- Írjunk megoldóprogramot és bizonyítsuk be a helyességét levezetéssel! (Használhatjuk a szereplő hely nevű függvényt a programban is bárhol.) 8 pont
- Specifikáljunk egy feladatot és adjunk megoldóprogramot levezetéssel a hely függvény kiszámítá-
sára egy adott x vektor egy adott i elemére. 7 pont

$$\mathbb{V} = \text{vect}(\mathbb{Z}, \mathbb{N})$$

$$A = \mathbb{V} \times \mathbb{V}$$

$$B = \mathbb{V}$$

$$Q : (x = x' \wedge y. \text{lob} = x. \text{lob} \wedge y. \text{hib} = x. \text{hib} \wedge \forall i, j \in [x. \text{lob}, x. \text{hib}] : i \neq j \rightarrow x_i \neq x_j)$$

$$R : (Q \wedge \forall i \in [x. \text{lob}, x. \text{hib}] : y_{\text{hely}(x,i)} = x_i), \text{ ahol } \text{hely}(x, i) = x. \text{lob} + \sum_{j=x. \text{lob}}^{x. \text{hib}} \chi(x_j < x_i)$$

Megoldás:

A feladat az, hogy rendezzük az x vektort növekvő sorrendbe, az eredmény y -ban keletkezzen! 3 pont

$$P : (Q \wedge k \in [x. \text{lob} - 1, x. \text{hib}] \wedge \forall i \in [x. \text{lob}, k] : y_{\text{hely}(x,i)} = x_i) \quad 1 \text{ pont}$$

$$1. \quad \boxed{Q \Rightarrow P}$$

$$Q' : (Q \wedge k = x. \text{lob} - 1) \quad 1 \text{ pont}$$

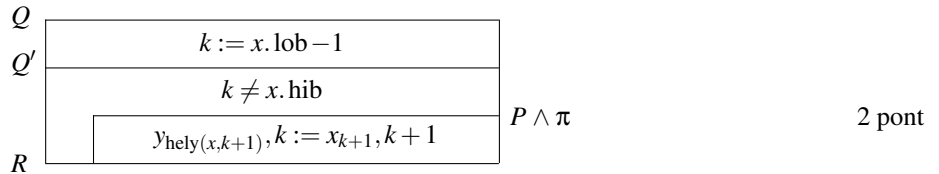
$$2. \quad \boxed{P \wedge \neg \pi \Rightarrow R}$$

$$\neg \pi = (k = x. \text{hib}) \quad 1 \text{ pont}$$

$$3. \quad \boxed{P \wedge \pi \Rightarrow t > 0}$$

$$t := x. \text{hib} - k \quad 1 \text{ pont}$$

$$4./5. \quad \boxed{P \wedge \pi \wedge t = t_0 \Rightarrow \text{If}(S_0, P \wedge t < t_0)}$$



$$\begin{array}{ccc}
 P \wedge \pi \wedge t = t_0 & \stackrel{?}{\Rightarrow} & \text{If}(y_{\text{hely}(x,k+1)}, k := x_{k+1}, k + 1, P \wedge t < t_0) \\
 \parallel & & \parallel \\
 \left. \begin{array}{l} Q \wedge k \in [x. \text{lob} - 1, x. \text{hib} - 1] \wedge \\ \forall i \in [x. \text{lob}, k] : y_{\text{hely}(x,i)} = x_i \wedge \\ x. \text{hib} - k = t_0 \end{array} \right\} & \stackrel{?}{\Rightarrow} & \left\{ \begin{array}{l} Q \wedge k + 1 \in [x. \text{lob} - 1, x. \text{hib}] \wedge \\ \forall i \in [x. \text{lob}, k + 1] : y_{\text{hely}(x,i)} = x_i \wedge \\ y_{\text{hely}(x,k+1)} = x_{k+1} \wedge \\ x. \text{hib} - k - 1 < t_0 \end{array} \right.
 \end{array}$$

A hely függvény:

$$A = \mathbb{V} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$$B = \mathbb{V} \times \mathbb{Z}$$

$$Q : (x = x' \wedge i = i' \wedge i \in [x. \text{lob}, x. \text{hib}])$$

$$R : (Q \wedge r = \text{hely}(x, i) = x. \text{lob} + \sum_{j=x. \text{lob}}^{x. \text{hib}} \chi(x_j < x_i))$$

$$P : (Q \wedge j \in [x. \text{lob} - 1, x. \text{hib}] \wedge r = x. \text{lob} + \sum_{j=x. \text{lob}}^j \chi(x_j < x_i))$$

$$1. \quad \boxed{Q \Rightarrow P}$$

$$Q' : (Q \wedge j = x. \text{lob} - 1 \wedge r = x. \text{lob})$$

$$2. \quad \boxed{P \wedge \neg \pi \Rightarrow R}$$

$$\neg \pi = (j \neq x. \text{hib})$$

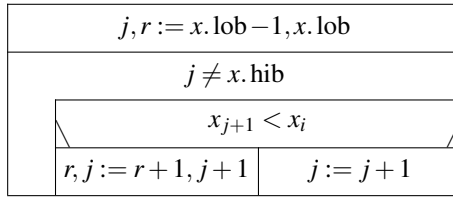
3. $\boxed{P \wedge \pi \Rightarrow t > 0}$
 $t := x.\text{hib} - j$

1 pont

4./5. $\boxed{P \wedge \pi \wedge t = t_0 \Rightarrow \text{lf}(S_0, P \wedge t < t_0)}$

Az elágazás levezetési szabályával levezethető.

1 pont



1 pont

2. feladat

12 pont

Adott az x vektor, amely természetes számokat és nullákat tartalmaz, azonban biztosan természetes számmal kezdődik. Írjuk minden 0 elem helyére az előtte szereplő természetes számot!

Pl. a $\langle 2, 0, 0, 3, 4, 0, 5, 4 \rangle$ vektort helyben a $\langle 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 4 \rangle$ vektorra alakítsuk!

Specifikáljuk a feladatot és adjunk megoldóprogramot a levezetés módszerével!

Segítség: $\forall i \in [x.\text{lob}, x.\text{hib}] : f(x, i) := \begin{cases} x_i & , \text{ ha } x_i \neq 0 \\ f(x, i-1) & , \text{ ha } x_i = 0 \end{cases}$

Megoldás:

$\mathbb{V} = \text{vect}(\mathbb{Z}, \mathbb{N}_0), I_{\mathbb{V}}(v) = (v.\text{lov} \neq 0)$

$A = \mathbb{V}$

$B = \overset{x}{\underset{x'}{\mathbb{V}}}$

4 pont

$Q : (x = x')$

$R : (\forall i \in [x.\text{lob}, x.\text{hib}] : x_i = f(x', i))$

$P : (j \in [x.\text{lob}, x.\text{hib}] \wedge \forall i \in [x.\text{lob}, j] : x_i = f(x', i) \wedge \forall i \in [j+1, x.\text{hib}] : x_i = x'_i)$

2 pont

Az invariáns azt írja le, hogy egy bizonyos pontig (j) az f szerint vannak már kiszámolva a vektorban az elemek, utána viszont még változatlan a vektor.

1. $\boxed{Q \Rightarrow P}$ Felhasználva a vektor invariánsát is:

$Q' : (Q \wedge j = x.\text{lob}) \Rightarrow P$

1 pont

2. $\boxed{P \wedge \neg \pi \Rightarrow R}$
 $\neg \pi = (j \neq x.\text{hib})$

1 pont

3. $\boxed{P \wedge \pi \Rightarrow t > 0}$
 $t := x.\text{hib} - j$

1 pont

4. $\boxed{P \wedge \pi \Rightarrow \text{lf}(S_0, P)}$

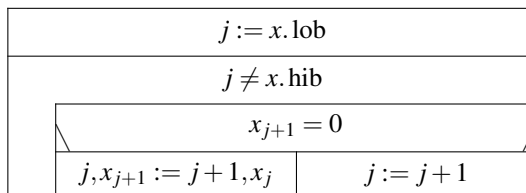
2 pont

Elágazás aszerint, hogy x_{j+1} nulla-e. A levezetési szabály első pontja triviálisan teljesül.

A második pont első fele:

$$\begin{array}{l}
 P \wedge \pi \wedge t = t_0 \wedge x_{j+1} = 0 \\
 \parallel \\
 \left. \begin{array}{l}
 j \in [x.\text{lob}, x.\text{hib} - 1] \wedge \\
 \forall i \in [x.\text{lob}, j] : x_i = f(x', i) \wedge \\
 \forall i \in [j+1, x.\text{hib}] : x_i = x'_i \wedge \\
 x_{j+1} = 0 \wedge x.\text{hib} - j = t_0
 \end{array} \right\} \stackrel{?}{\Rightarrow} \left\{ \begin{array}{l}
 \text{lf}(j, x_{j+1} := j+1, x_j, P \wedge t < t_0) \\
 \parallel \\
 j+1 \in [x.\text{lob}, x.\text{hib}] \wedge \\
 \forall i \in [x.\text{lob}, j+1] : x_i = f(x', i) \wedge \\
 \underbrace{x_{j+1} = f(x', j+1)}_{f(x', j) = x_j} \wedge \\
 \forall i \in [j+2, x.\text{hib}] : x_i = x'_i \wedge \\
 x.\text{hib} - j - 1 < t_0
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

A másik ág a $j := j + 1$ értékadással bizonyítható.



1 pont

Megjegyzés:

Vegyük észre, hogy ezt a második programot felhasználva az első program eredménye korrigálható abban az esetben, ha a rendezendő vektor tartalmazott azonos elemeket. Ugyanis ekkor az eredményvektorban az azonos értékeket tartalmazandó rész első eleme lesz az érték, a többihez az első program nem nyúl. Így, ha azok mindegyike kezdetben nulla (vagy valami más kinevezett, de egyébként nem szereplő érték), akkor a második feladat megoldását lefuttatva az y (fél)eredmény vektoron immáron helyesen rendezett vektort kapunk.