„Simplicity is prerequisite for reliability.”
— Edsger Dijkstra

Bevezetés a programozáshoz 1., 3. zárthelyi dolgozat
2007. december 12.

Az alábbi feladatok megoldása során állításaidat indokold! Az indoklások triviális tényekre, a tanult definíciókra és a kimondott tételekre hivatkozhatnak. Az előadáson vagy gyakorlaton szerepelt bármely állítás felhasználható, azonban az el nem hangzottakat szintén indokolni kell!

1. Feladat (20 pont)
Legyen $R \subseteq \{1,2,3,4,5\} \times \{1,2,3,4,5\}$.
$R = \{(1,2),(1,4),(2,1),(3,4),(3,3),(3,5),(4,5)\}$.

- Mi a reláció értelmezési tartománya és értékkészlete? (2 pont)
- Determinisztikus-e, illetve függvény-e a reláció? (4 pont)
- Mi R 0., 2. hatványa, mi R inverze? (5 pont)
- Mi a {4, 5} halmaz inverz képe, illetve ősképe? (5 pont)
- Hány eleme van R értékkészlete hatványhalmazának? ($|\mathcal{P}(\mathcal{R}_R)| =$?) (4 pont)

Megoldás:

- $\mathcal{D}_R = \{1,2,3,4\}, \mathcal{R}_R = \{1,2,3,4,5\}$
- Nem determinisztikus, mivel az 1-hez két értéket is hozzárendel. Függvény sem lehet, mivel nem determinisztikus.
- $R^0 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$,
  $R^2 = \{(1,1),(1,5),(2,2),(2,4),(3,5),(3,3),(3,4)\}$,
  $R^{(-1)} = \{(2,1),(4,1),(1,2),(4,3),(3,3),(5,3),(5,4)\}$.
- $|\mathcal{R}_R| = 5 \Rightarrow |\mathcal{P}(\mathcal{R}_R))| = 2^5 = 32$

2. Feladat (10 pont)
$R \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

$$R(a) = \begin{cases} \{a-2\}, & \text{ha } a > 1 \\ \{2^k | k \in \mathbb{N}\}, & \text{ha } a = 1 \end{cases}$$

Mi az R reláció lezártja és korlátos lezártja?

Megoldás:
$\forall x \in \mathbb{N}_0 : x \in \mathcal{D}_{\overline{R}}$, hiszen ha páros számról van szó, akkor véges lépésben 2-t mindig kivonva a számból elérjük az értelmezési tartományon kívűl lévő 0-át. Páratlan számok esetén pedig az 1-et, ahonnan viszont biztosan páros számba jutunk, hiszen 2 minden természetes kitevőjű hatványa páros. Tehát a relációt „végigkövető” sorozatok mindig 0-ra végződnek, így: $\forall x \in \mathbb{N}_0 : \overline{R}(x) = \{0\}$.

A sorozatok hossza azonban csak akkor becsülhető felülről, ha a kiinduló érték páros, ugyanis páratlan esetben elérve az 1-et, bármekkora kettőhatványra „ugorhatunk”. Így a korlátos lezárt értelmezési tartományában a páratlan számok nincsenek benne.

3. Feladat (12 pont)

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{N} \\ \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{**} \supseteq S &= \{(a, < a \cdots >) | a \equiv 1 \text{ mod } (4)\} \\ &\cup \ \{(b, < b >), (b, < b, \frac{b}{2} >) | b \equiv 2 \text{ mod } (4)\} \\ &\cup \ \{(c, < c, 2 * c >) | c \equiv 3 \text{ mod } (4)\} \\ &\cup \ \{(d, < d, \frac{d}{2} >) | d \equiv 0 \text{ mod } (4)\} \\ H(x) &= (x \text{ páros szám}) \end{aligned}$$

Add meg az $\lceil \mathrm{lf}(S,H) \rceil$ halmazt! (Az $x \equiv 2 \bmod (4)$ jelölés azt jelenti, hogy „x 4-el osztva 2 maradékot ad".)

Megoldás: A megértés kedvéért írjunk fel a programhalmazt valameddig konkrét számokkal:
$S = \{(1, <1, \cdots>), (2, <2>), (2, <2, 1>), (3, <3, 6>), (4, <4, 2>),$
$(5, <5, \cdots>), (6, <6>), (6, <6, 3>), (7, <7, 14>), (8, <8, 4>), \ldots\}$
Számoljuk ki $p(S)$-t, mert tudjuk, hogy az $\lceil \mathrm{lf}(S,H) \rceil (= p(S)^{-1}(\lceil H \rceil))$ annak segítségével könnyen számolható.
$p(S) = \{(2,2), (2,1), (3,6), (4,2), (6,6), (6,3), (7,14), (8,4), \ldots\}$, innen már látható, hogy a páros számok programfüggvényre vonatkozó ősképe a 4-el osztható, illetve 3 maradékot adó számok lesznek, azaz
$\lceil \mathrm{lf}(S,H) \rceil = \{3, 4, 7, 8, 11, 12, 15, 16, \ldots\}$.

4. Feladat (12 pont)
Igaz-e, ha $S \subseteq B \times B^{**}$, A altere B-nek, akkor

- $\mathcal{D}_{\mathrm{pr}_A(p(S))} = \mathrm{pr}_A(\mathcal{D}_{p(S)})$? (6 pont)
- S A-ra történő projekciójának programként való kiterjesztése B-re azonos S-sel? (6 pont)

Megoldás:

- Ez minden relációra igaz, két irányú tartalmazással bizonyítható.
- Nem igaz, ellenpélda pl. úgy kapható, ha az S egyik sorozatának két egymás melletti tagja csak a kiegészítő altérben tér el. Ugyanis a projekció és kiterjesztés után ez az eltérés meg fog szűnni, így a két egymás melletti tag azonos lesz, a sorozat nem lesz redukált és így a program már nem is program. Egy olyan reláció, ami program, illetve a most kapott nem program reláció pedig biztosan nem egyezhet.

5. Feladat (6 pont)
$A = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}. S \subseteq A \times A^{**}$. S az $(1,1,2)$ pontból indítva mindig előállítja a 10. Fibonacci számot az $u(n) = u(n-1) + u(n-2)$ rekurzív összefüggés alapján. Az állapottér koordinátái rendre $u(n-2)$-nek, $u(n-1)$-nek és $u(n)$-nek felelnek meg. Írd fel azt a sorozatot, amelyet S az $(1,1,2)$ ponthoz rendel! Mit rendel $p(S)$ az $(1,1,2)$ ponthoz?

Megoldás:
$S(1,1,2) = \{<(1,1,2), (1,2,3), (2,3,5), (3,5,8), (5,8,13), (8,13,21), (13,21,34), (21,34,55)>\}$, tehát
$p(S)(1,1,2) = \{(21,34,55)\}$.