„Computer Science is no more about computers than astronomy is about telescopes."
— Edsger Dijkstra

Bevezetés a programozáshoz 1., 1. zárthelyi dolgozat, megoldások
2006. október 24.

Az alábbi feladatok megoldása során állításaidat indokold! Az indoklások triviális tényekre, a tanult definíciókra és a kimondott tételekre hivatkozhatnak. Az előadáson vagy gyakorlaton szerepelt bármely állítás felhasználható, azonban az el nem hangzottakat szintén indokolni kell!

1. Feladat
Írjuk fel az $A \times B$, $A \times C$, $C \times B$, $(A \times B) \times C$, és $A \times B \times C$ halmazok elemeit, ha $A = \{0,1\}$, $B = \{1,2,3\}$, $C = \{p,q\}$!
(5 pont)
Megoldás: (direktszorzatonként 1 pontért)
$A \times B = \{(0,1),(0,2),(0,3),(1,1),(1,2),(1,3)\}$
$A \times C = \{(0,p),(0,q),(1,p),(1,q)\}$
$C \times B = \{(p,1),(p,2),(p,3),(q,1),(q,2),(q,3)\}$
$(A \times B) \times C =$
$\{((0,1),p),((0,2),p),((0,3),p),((1,1),p),((1,2),p),((1,3),p),((0,1),q),((0,2),q),((0,3),q),((1,1),q),((1,2),q),((1,3),q)\}$
$A \times B \times C = \{(0,1,p),(0,2,p),(0,3,p),(1,1,p),(1,2,p),(1,3,p),(0,1,q),(0,2,q),(0,3,q),(1,1,q),(1,2,q),(1,3,q)\}$

2. Feladat
$R \subseteq A \times A$. Tegyük fel, hogy az R értelmezési tartománya egyenlő az R értelmezési tartományának R-re vonatkozó ősképével. Mit mondhatunk R lezártjáról? (13 pont)
Megoldás:
Tudjuk, hogy $\forall a \notin \mathcal{D}_R : (a,a) \in \mathcal{D}_{\overline{R}}$ (4 pont)
Valamint: $\mathcal{D}_R = R^{-1}(\mathcal{D}_R)$, azaz $\{a \in \mathcal{D}_R\} = \{a \in \mathcal{D}_R | R(a) \subseteq \mathcal{D}_R\}$, ami úgy lehetséges, hogy $\forall a \in \mathcal{D}_R : \emptyset \neq R(a) \subseteq \mathcal{D}_R$.
Ekkor viszont minden $a \in \mathcal{D}_R$ elemre biztos van olyan sorozat, ami „végigköveti" a relációt, azaz egyik ilyen elem sem lehet benne a lezárt értelmezési tartományában. (8 pont)
Így a lezárt: $\overline{R} = \{(a,a) \in A \times A | a \notin \mathcal{D}_R\}$. (1 pont)

3. Feladat
$S_1 \subseteq S_2$ (S_1 és S_2 programok). S_2 megoldja az F feladatot. Igaz-e, hogy S_1 megoldja F-et? (10 pont)
Megoldás:
Írjuk fel, hogy mit jelent az, hogy S_2 megoldja F-et:
$\mathcal{D}_F \subseteq \mathcal{D}_{p(S_2)}$ (2 pont) és $\forall a \in \mathcal{D}_F : p(S_2)(a) \subseteq F(a)$ (2 pont),
ugyanakkor az, hogy $S_1 \subseteq S_2$, mivel S_1 is program kell, hogy maradjon, (azaz mindenhonnan elindítható) azt jelenti, hogy:
$\mathcal{D}_{p(S_2)} \subseteq \mathcal{D}_{p(S_1)}$ (2 pont) és $\forall a \in \mathcal{D}_{p(S_2)} : p(S_1)(a) \subseteq p(S_2)(a)$ (2 pont), az elmondottakat együttvéve viszont:
$\mathcal{D}_F \subseteq \mathcal{D}_{p(S_2)} \subseteq \mathcal{D}_{p(S_1)}$ és $\forall a \in \mathcal{D}_F : p(S_1)(a) \subseteq p(S_2)(a) \subseteq F(a)$, így S_1 is megoldja F-et (2 pont).

4. Feladat
Keressük meg egy természetes szám egy osztóját!
$A = \mathbb{N}, F = \{(u,v) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | v \text{ osztója } u\text{-nak}\}$.
$S_1 = \{(a, <a,1>) \in A \times A^* | a > 1\} \cup \{(1, <1>)\}$,
$S_2 = \{(1,<1>),(2,<2,1,2>)\} \cup \{(a,\alpha) \in A \times A^* | \alpha_1 = a \wedge \tau(\alpha) = (a \text{ legkisebb 1-nél nagyobb osztója})\}$.

- S_1 felírásában miért van szükség az unióra (azaz miért nem írhatunk egyszerűen az első részhalmazba $a \geq 1$-et megkötésként)? (3 pont)
  Megoldás: Azért, mert akkor igaz lenne $(1, <1,1>) \in S_1$ és így S_1 nem teljesítené a program azon feltételét, ami önmaga értékkészletének redukáltságára vonatkozik.
- Írjuk fel $p(S_1)$-et és $p(S_2)$-t! (5 pont)
  Megoldás:
  $p(S_1)(1) = p(S_2)(1) = \{1\}$
  $\forall a \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : p(S_1)(a) = \{1\}, p(S_2)(a) = \{a \text{ legkisebb, de 1-nél nagyobb osztója}\}$
- Megoldja-e S_1 ill. S_2 a feladatot? (5 pont)
  Megoldás: A fenti programfüggvények mindenhol értelmezhetők, így a megoldás definíció első pontja mindkét esetben teljesül. A második pont pedig azért igaz mindkét esetben, mert minden számhoz egy konkrét osztót rendelnek, míg a feladat bármely osztót megengedné. Azaz igaz a tartalmazás, amit a második pont követel. Mindkét program megoldja a feladatot.

5. Feladat

$$\begin{aligned}
A &= \mathbb{N} \\
\mathbb{N}\times\mathbb{N}^{**} \supseteq S &= \{(a, < a \cdots >) | a \equiv 1 \bmod (4)\} \\
&\cup \{(b, < b >), (b, < b, \frac{b}{2} >) | b \equiv 2 \bmod (4)\} \\
&\cup \{(c, < c, 2 * c >) | c \equiv 3 \bmod (4)\} \\
&\cup \{(d, < d, \frac{d}{2} >) | d \equiv 0 \bmod (4)\} \\
H(x) &= (x \text{ páros szám})
\end{aligned}$$

Add meg az $\lceil \mathrm{lf}(S,H) \rceil$ halmazt! (12 pont)
Megoldás: A megértés kedvéért írjunk fel a programhalmazt valameddig konkrét számokkal:
$S = \{(1, < 1, \cdots >), (2, < 2 >), (2, < 2, 1 >), (3, < 3, 6 >), (4, < 4, 2 >),$
$(5, < 5, \cdots >), (6, < 6 >), (6, < 6, 3 >), (7, < 7, 14 >), (8, < 8, 4 >), \ldots\}$
Számoljuk ki $p(S)$-t, mert tudjuk, hogy az $\lceil \mathrm{lf}(S,H) \rceil (= p(S)^{-1}(\lceil H \rceil))$ annak segítségével könnyen számolható.
$p(S) = \{(2,2), (2,1), (3,6), (4,2), (6,6), (6,3), (7,14), (8,4), \ldots\}$, innen már látható, hogy a páros számok programfüggvényre vonatkozó ősképe a 4-el osztható, illetve 3 maradékot adó számok lesznek, azaz
$\lceil \mathrm{lf}(S,H) \rceil = \{3, 4, 7, 8, 11, 12, 15, 16, \ldots\}$.

6. Feladat
Keressük meg egy természetes szám összes valódi osztóját. Specifikáld a feladatot! (7 pont)
Megoldás:
$A = \underset{x}{\mathbb{N}} \times \underset{r}{\mathcal{F}(\mathbb{N})}$ (2 pont)
$B = \underset{x'}{\mathbb{N}}$ (1 pont)
$Q = (x = x')$ (1 pont)
$R = (Q \wedge (a \in r) \leftrightarrow (a | x \wedge a \neq 1 \wedge a \neq x)$ (3 pont)

Megjegyzés: az $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ a természetes számok összes lehetséges véges részhalmazát jelenti.