

*Feladat:* Az azonos értelmezési tartományú  $x$  és  $y$  vektorop egy  $p$  jegyű ( $p = x.dom$ ) decimális szám számjegyeit tartalmazza (A kisebb indexeken vannak 10 magasabb hatványainak együtthatói). Képezzük a  $z$  vektorban a számok összegét, és állapítsuk meg, hogy keletkezett-e túlcsoordulás!

*Specifikáció:*

$$\mathbb{V} = \text{vect}(\mathbb{Z}, \{0, 1, \dots, 9\})$$

$$A = \mathbb{V} \times \mathbb{V} \times \mathbb{V} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{L} \times \mathbb{N}_0$$

$$B = \mathbb{V} \times \mathbb{V}$$

$$Q = (x = x' \wedge y = y' \wedge x.dom = y.dom = z.dom \wedge x.hib = y.hib = z.hib)$$

$$R = \left( Q \wedge \sum_{i \in [x.lob..x.hib]} 10^{x.hib-i} (x[i] + y[i]) = 10^{x.dom} * \chi(o) + \sum_{i \in [x.lob..x.hib]} 10^{x.hib-i} z[i] \right)$$

*Megoldás:*

Most keressük meg a specifikációnak megfelelő megoldó programot! A megoldást úgy sejtjük, hogy egy ciklussal találhatjuk meg. Nos, mi legyen ennek a ciklusnak az invariánsa?

$$P = \left( Q \wedge k \in [x.lob..x.hib + 1] \wedge \sum_{i \in [k..x.hib]} 10^{x.hib-i} (x[i] + y[i]) = 10^{x.hib-k+1} * \chi(o) + \sum_{i \in [k..x.hib]} 10^{x.hib-i} z[i] \right)$$

Ellenőrizzük le a ciklus feltételeit:

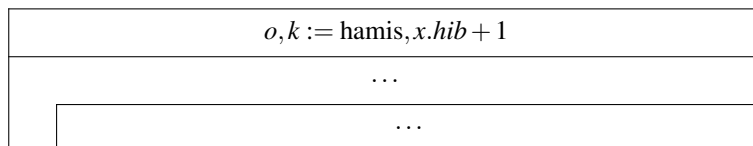
1.  $Q \Rightarrow P$

Jól láthatóan nem teljesül, sőt fordítva igaz. Ezért megpróbálunk egy olyan közbülső állapotot felírni, ami a  $Q$ -ből könnyedén (egy értékadással) elérhető és ugyanakkor ez a kívánt feltétel teljesül rá. Amennyiben ez sikerül, akkor már csak egy szekvencia közbülső feltételeként kell pillantani erre az új  $Q'$  feltételre és máris felírható lesz a kívánt program egy értékadás és egy ciklus szekvenciájaként.

$$Q' = (Q \wedge o = \text{hamis} \wedge k = x.hib + 1)$$

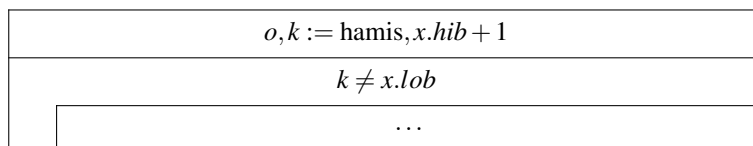
Látható, hogy  $Q' \Rightarrow P$  és  $Q \Rightarrow \text{If}(o, k := \text{hamis}, x.hib + 1, Q') = Q$ .

Tehát a program valahogy így néz ki:



2.  $P \wedge \neg \pi \Rightarrow R$

Ez a feltétel kezünkbe adja a ciklusfeltételt, hiszen  $P$  és  $R$  összehasonlításából  $\neg \pi$ -re  $k = x.lob$  adódik. Tehát  $\pi = (k \neq x.lob)$ .



3.  $P \wedge \pi \Rightarrow t > 0$

$t := k - x.lob$  választással ez az állítás triviálisan teljesül.

5.  $P \wedge \pi \wedge t = t_0 \Rightarrow \text{If}(S_0, t < t_0)$

Előrevéve az utolsó feltételt már most biztosíthatjuk, hogy a programunk lefutása véges legyen.  $S_0 := (k := k - 1)$

$$P \wedge \pi \wedge k - x.lob = t_0 \stackrel{?}{\Rightarrow} \text{If}(S_0, k - x.lob < t_0) = k - 1 - x.lob < t_0 \checkmark$$

4.  $\boxed{P \wedge \pi \Rightarrow \text{lf}(S_0, P)}$

Könnyedén látható, hogy a jelenlegi ciklusmag ezt a feltételt nem teljesíti, hiszen

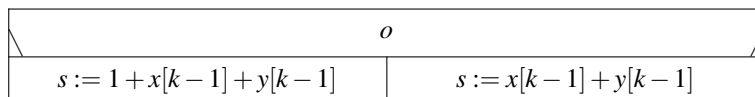
$$\text{lf}(S_0, P) = \left( Q \wedge k-1 \in [x.\text{lob}..x.\text{hib} + 1] \wedge \sum_{i \in [k-1..x.\text{hib}]} 10^{x.\text{hib}-i} (x[i] + y[i]) = 10^{x.\text{hib}-k+2} * \chi(o) + \sum_{i \in [k-1..x.\text{hib}]} 10^{x.\text{hib}-i} z[i] \right)$$

$=: Q''$ , nem következik  $P \wedge \pi$ -ből.

Ezért egy szekvencia második fele lesz az eddigi ciklusmag és  $Q''$ -t kell elérni az első felében. Ehhez vezessük be a  $Q'''$  állítást a következőképpen:

$$Q''' := (P \wedge \pi \wedge s = \chi(o) + x[k-1] + y[k-1]) = \\ (Q \wedge k \in [x.\text{lob} + 1..x.\text{hib} + 1] \wedge \sum_{i \in [k..x.\text{hib}]} 10^{x.\text{hib}-i} (x[i] + y[i]) = 10^{x.\text{hib}-k+1} * \chi(o) + \sum_{i \in [k..x.\text{hib}]} 10^{x.\text{hib}-i} z[i] \\ \wedge s = \chi(o) + x[k-1] + y[k-1])$$

A most bevezetett új állapot az alábbi elágazással elérhető  $P \wedge \pi$ -ből:



Hiszen:

1.  $\boxed{P \wedge \pi \Rightarrow \left( \bigvee_{i=1}^n \pi_i \right)}$  Nyilván teljesül.

2.  $\boxed{\forall i \in [1..n] : P \wedge \pi \wedge \pi_i \Rightarrow \text{lf}(S_i, Q''')}$

1.  $o : P \wedge \pi \wedge o \stackrel{?}{\Rightarrow} P \wedge \pi \wedge 1 + x[k-1] + y[k-1] = \chi(o) + x[k-1] + y[k-1] \checkmark$

2.  $\neg o : P \wedge \pi \wedge \neg o \stackrel{?}{\Rightarrow} P \wedge \pi \wedge x[k-1] + y[k-1] = \chi(o) + x[k-1] + y[k-1] \checkmark$

Már csak a  $Q'''$  és a  $Q''$  állapotot kell programmal összekötnünk, szerencsére ez egy értékadással megtehető:

$$Q''' \stackrel{?}{\Rightarrow} \text{lf}(o, z[k-1] := s \geq 10, s \text{ mod } 10, Q'') = Q \wedge k-1 \in [x.\text{lob}..x.\text{hib} + 1] \wedge \sum_{i \in [k-1..x.\text{hib}]} 10^{x.\text{hib}-i} (x[i] + y[i]) = 10^{x.\text{hib}-k+2} * \chi(s \geq 10) + \sum_{i \in [k..x.\text{hib}]} 10^{x.\text{hib}-i} z[i] + 10^{x.\text{hib}-k+1} (s \text{ mod } 10)$$

$$+ \sum_{i \in [k..x.\text{hib}]} 10^{x.\text{hib}-i} z[i] + 10^{x.\text{hib}-k+1} (s \text{ mod } 10)$$

Itt két lehetőséget kell megkülönböztetnünk:

1.  $\neg o$  (vagyis  $\chi(o) = 0$ ):  $Q \wedge k \in [x.\text{lob} + 1..x.\text{hib} + 1] \wedge \sum_{i \in [k..x.\text{hib}]} 10^{x.\text{hib}-i} (x[i] + y[i]) = \sum_{i \in [k..x.\text{hib}]} 10^{x.\text{hib}-i} z[i] \\ \wedge s = x[k-1] + y[k-1] \stackrel{?}{\Rightarrow} Q \wedge k-1 \in [x.\text{lob}..x.\text{hib} + 1] \wedge \sum_{i \in [k-1..x.\text{hib}]} 10^{x.\text{hib}-i} (x[i] + y[i]) = 10^{x.\text{hib}-k+2} * \chi(s \geq 10) + \sum_{i \in [k..x.\text{hib}]} 10^{x.\text{hib}-i} z[i] + 10^{x.\text{hib}-k+1} (s \text{ mod } 10)$ , azaz igaz-e, hogy  $10^{x.\text{hib}-k+1} (x[k-1] + y[k-1]) = 10^{x.\text{hib}-k+2} * \chi(x[k-1] + y[k-1] \geq 10) + 10^{x.\text{hib}-k+1} (x[k-1] + y[k-1] \text{ mod } 10)$ , mivel  $x[k-1] + y[k-1] \leq 18$  az állítás igaz.

2.  $o$  (vagyis  $\chi(o) = 1$ ): hasonlóan.

