

*Feladat:* Adott egy  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  függvény. Határozzuk meg, hogy a függvény melyik két pontban veszi fel a maximumát és a minimumát az  $[m..n]$  intervallumon.

*Specifikáció:*

$$A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$$B = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$$Q = (m = m' \wedge n = n' \wedge m \leq n)$$

$$R = (Q \wedge b \in [m..n] \wedge k \in [m..n] \wedge \forall i \in [m..n] : f(i) \geq f(k) \wedge \forall i \in [m..n] : f(i) \leq f(b))$$

A specifikációból kiolvasható, hogy nem engedjük meg az üres intervallumon való futtatást, illetve az eredményt az állapottér két változója ( $b$  és  $k$ , jelentése rendre legnagyobb, legkisebb index) szolgáltatja.

*Megoldás:*

Most keressük meg a specifikációnak megfelelő megoldó programot! A megoldást úgy sejtjük, hogy egy ciklussal találhatjuk meg. Nos, mi legyen ennek a ciklusnak az invariánsa (és új állapottere)?

$$A' = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$$P = (Q \wedge b \in [m..n] \wedge k \in [m..n] \wedge i \in [m..n] \wedge f(k) = ke \wedge f(b) = be \wedge \forall j \in [m..i] : (f(j) \geq ke \wedge f(j) \leq be) \wedge ke \leq be)$$

Ellenőrizzük le a ciklus feltételeit:

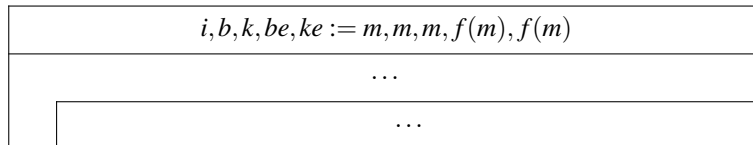
$$1. \boxed{Q \Rightarrow P}$$

Jól láthatóan nem teljesül, sőt fordítva igaz. Ezért megpróbálunk egy olyan közbülső állapotot felírni, ami a  $Q$ -ból könnyedén (egy értékadással) elérhető és ugyanakkor ez a kívánt feltétel teljesül rá. Amennyiben ez sikerül, akkor már csak egy szekvencia közbülső feltételeként kell pillantani erre az új  $Q'$  feltételre és máris felírható lesz a kívánt program egy értékadás és egy ciklus szekvenciájaként.

$$Q' = (Q \wedge k = m \wedge b = m \wedge i = m \wedge ke = f(k) \wedge be = f(b))$$

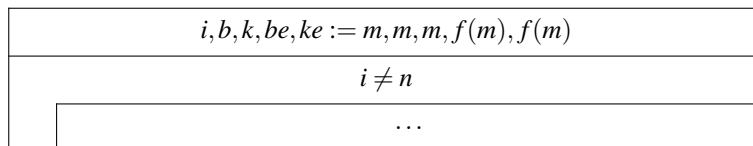
$$\text{Látható, hogy } Q' \Rightarrow P \text{ és } Q \Rightarrow \text{If}(i, b, k, be, ke := m, m, m, f(m), f(m), Q') = Q \wedge m = m \wedge m = m \wedge m = m \wedge f(m) = f(m) \wedge f(m) = f(m) = Q.$$

Tehát a program valahogy így néz ki:



$$2. \boxed{P \wedge \neg \pi \Rightarrow R}$$

Ez a feltétel kezünkbe adja a ciklusfeltételt, hiszen  $P$  és  $R$  összehasonlításából  $\neg \pi$ -re  $i = n$  adódik. Tehát  $\pi = (i \neq n)$ .

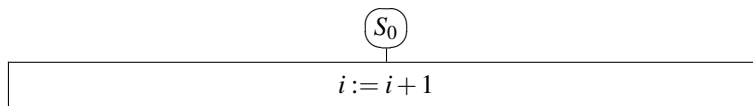


$$3. \boxed{P \wedge \pi \Rightarrow t > 0}$$

Jelen esetben ez:  $Q \wedge \dots \wedge i \in [m..n-1] \wedge \dots \Rightarrow t > 0$ . Tehát  $t := n - i$  egy megfelelő terminálófüggvény.

$$5. \boxed{P \wedge \pi \wedge t = t_0 \Rightarrow \text{If}(S_0, t < t_0)}$$

Előrevéve az utolsó feltételt már most biztosíthatjuk, hogy a programunk lefutása véges legyen. Mivel  $t = n - i$  és  $n$  az invariáns szerint nem változhat, a megoldás csak  $i$  növelése lehet. Előretételezve kis gondolkodással látható, hogy egynél többel nem érdemes növelni.



$$P \wedge \pi \wedge t = t_0 \Rightarrow t = t_0 \Leftrightarrow n - i = t_0 \stackrel{?}{\Rightarrow} \text{If}(S_0, t < t_0) = n - i - 1 < t_0 \checkmark$$

4.  $P \wedge \pi \Rightarrow \text{If}(S_0, P)$

A mi esetünkben:

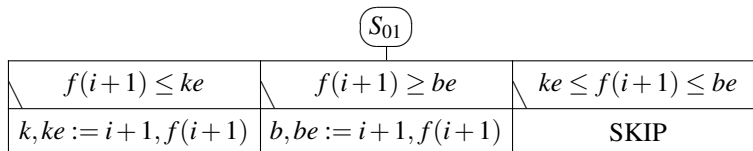
$$(Q \wedge b \in [m..n] \wedge k \in [m..n] \wedge i \in [m..n-1] \wedge f(k) = ke \wedge f(b) = be \wedge \forall j \in [m..i] : (f(j) \geq ke \wedge f(j) \leq be) \wedge ke \leq be) \stackrel{?}{\Rightarrow}$$

$$(Q \wedge b \in [m..n] \wedge k \in [m..n] \wedge i + 1 \in [m..n] \wedge f(k) = ke \wedge f(b) = be \wedge \forall j \in [m..i+1] : (f(j) \geq ke \wedge f(j) \leq be) \wedge ke \leq be)$$

Látható, hogy ez a feltétel nem teljesül, ha  $f(i+1) < ke \vee f(i+1) > be$ .

Azonban kiszámoltuk  $\text{If}(S_0, P)$ -t, ezt az eredményt ne hagyjuk veszni, hanem nevezzük el  $Q''$ -nek és próbáljunk meg eljutni ide egy másik programrészlettel! Ha sikerrel járunk, akkor a szekvencia levezetési szabályát alkalmazva rögtön megkapjuk a feltételt kielégítő ciklusmagot. Fontos, hogy miközben az előbb említett részprogramot keressük, olyanok szóba sem jöhetnek, amik  $i$  értékét megváltoztatják, hiszen ezek elrontanák a már bizonyított 5. követelményt.

A megoldás természetesen egy elágazás lesz, aminek tehát a  $P \wedge \pi \Rightarrow \text{If}(S_{01}, Q'')$  követelményt kell teljesítenie.



4/1.  $P \wedge \pi \Rightarrow \left( \bigvee_{i=1}^n \pi_i \right)$

$$f(i+1) \leq ke \vee f(i+1) \geq be \vee ke \leq f(i+1) \leq be \Leftrightarrow (f(i+1) \leq ke \vee f(i+1) \geq be \vee ke \leq f(i+1)) \wedge (f(i+1) \leq ke \vee f(i+1) \geq be \vee be \geq f(i+1)) \Leftrightarrow \text{igaz. És igazra minden következik.}$$

4/2.  $\forall i \in [1..n] : P \wedge \pi \wedge \pi_i \Rightarrow \text{If}(S_i, Q'')$

1.  $f(i+1) \leq ke$ :

$$(Q \wedge b \in [m..n] \wedge k \in [m..n] \wedge i \in [m..n-1] \wedge f(k) = ke \wedge f(b) = be \wedge \forall j \in [m..i] : (f(j) \geq ke \wedge f(j) \leq be) \wedge ke \leq be \wedge f(i+1) \leq ke) \stackrel{?}{\Rightarrow}$$

$$\text{If}(k, ke := i+1, f(i+1), Q'') = (Q \wedge i+1 \in [m..n] \wedge b \in [m..n] \wedge i+1 \in [m..n] \wedge f(i+1) = f(i+1) \wedge f(b) = be \wedge \underbrace{\forall j \in [m..i+1] : (f(j) \geq f(i+1) \wedge f(j) \leq be)}_{\forall j \in [m..i] : (f(j) \geq f(i+1) \wedge f(j) \leq be) \wedge f(i+1) \geq f(i+1) \wedge f(i+1) \leq be} \wedge f(i+1) \leq be)$$

$$\checkmark$$

2.  $f(i+1) \geq be$ : HF

3.  $ke \leq f(i+1) \leq be$ :

$$(Q \wedge b \in [m..n] \wedge k \in [m..n] \wedge i \in [m..n-1] \wedge f(k) = ke \wedge f(b) = be \wedge \forall j \in [m..i] : (f(j) \geq ke \wedge f(j) \leq be) \wedge ke \leq be \wedge ke \leq f(i+1) \leq be) \stackrel{?}{\Rightarrow}$$

$$\text{If}(\text{SKIP}, Q'') = (Q \wedge k \in [m..n] \wedge b \in [m..n] \wedge i+1 \in [m..n] \wedge f(k) = ke) \wedge f(b) = be \wedge \underbrace{\forall j \in [m..i+1] : (f(j) \geq ke \wedge f(j) \leq be)}_{\forall j \in [m..i] : (f(j) \geq ke \wedge f(j) \leq be) \wedge ke \leq f(i+1) \wedge f(i+1) \leq be} \wedge ke \leq be$$

$$\checkmark$$

