3.

Kiterjesztések

Az előző fejezetben bevezetük a program és a feladatat fogalmát, és definiáltuk az azonos állapottéren levő feladat–program párok között a megoldás fogalmát. A gyakorlatban általában azonban a feladat és a program különböző állapottéren van: példaként megemlíthetjük azt az esetet, amikor egy feladat megoldására a programban további változókat kell bevezetni, azaz a feladat állapotterét újabb komponensekkel kell bővíteni.

A továbbiakban tehát a program és a feladat fogalmát fogjuk általánosítani, és megvizsgáljuk, hogy mit tudunk mondani a különböző állapottéren adott programok és feladatok viszonyáról.

Az előző fejezetben megismert megoldásfogalom elég egyszerű módon leírja, mit is jelent az, hogy egy program megold egy feladatot. Ezért ezt a megoldásfogalmat megtartjuk, és megpróbáljuk a különböző állapottéren levő feladatot és programot egy “közös állapottérre hozni".

3.1. A feladat kiterjesztése

Ha egy megoldó program állapottere bővebb, mint a feladaté, akkor a feladat állapotterét kibővítjük újabb komponensekkel, de értelemszerűen azok értékére nem adunk semmilyen korlátozást.

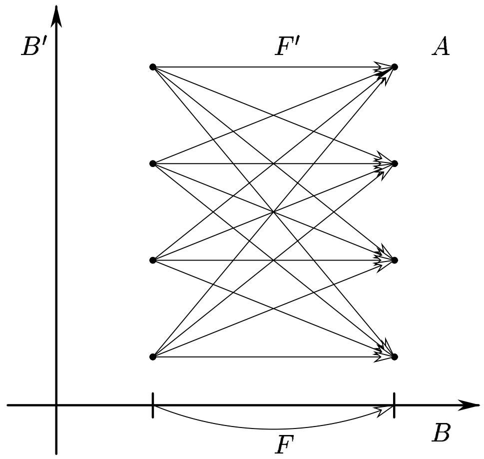
---

6. DEFINÍCIÓ: FELADAT KITERJESZTÉSE

Legyen a B állapottér altere az A állapottérnek. Az $F' \subseteq A \times A$ relációt az $F \subseteq B \times B$ feladat *kiterjesztésének* nevezzük, ha

$$F' = \{(x, y) \in A \times A \mid (pr_B(x), pr_B(y)) \in F\}.$$

Vegyük észre, hogy a feladat kiterjesztése az összes olyan $A \times A$-beli pontot tartalmazza, aminek B-re vett projekciója benne van F-ben, azaz a kiterjesztett feladat az új állapottér-komponensekre nem fogalmaz meg semmilyen megszorítást.



3.1. ábra. Feladat kiterjesztése

3.2. A program kiterjesztése

A program kiterjesztésének definíciójában az új komponensekre azt a kikötést tesszük, hogy azok nem változnak meg a kiterjesztett programban. Ezzel azt a gyakorlati követelményt írjuk le, hogy azok a változók, amelyeket a program nem használ, nem változnak meg a program futása során.

7. DEFINÍCIÓ: PROGRAM KITERJESZTÉSE

Legyen a B állapottér altere az A állapottérnek, és jelölje B' a B kiegészítő alterét A-ra. Legyen továbbá S program a B állapottéren. Ekkor az S' A-beli relációt az S program *kiterjesztésének* nevezzük, ha $\forall a \in A$:

$$S'(a) = \{\alpha \in A^{**} \mid pr_B(\alpha) \in S(pr_B(a)) \wedge \forall i \in D_\alpha : pr_{B'}(\alpha_i) = pr_{B'}(a)\}$$

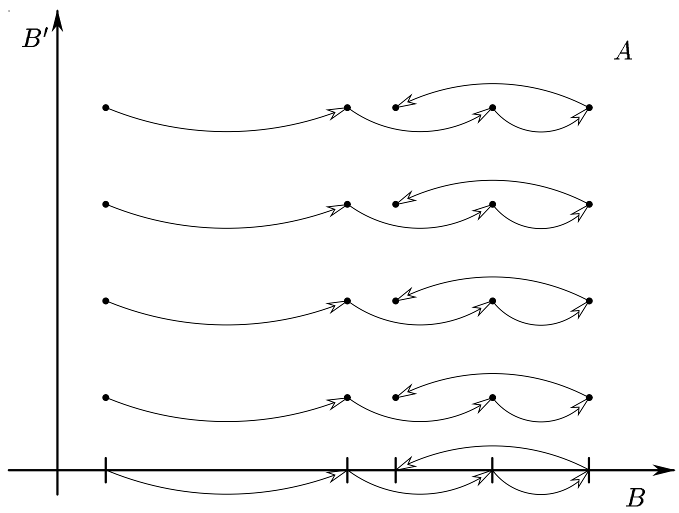
A fenti definíció alapján a kiterjesztett program értékkészletében csak olyan sorozatok vannak, amelyek "párhuzamosak" valamely sorozattal az eredeti program értékkészletéből.

Vajon a kiterjesztés megtartja a program-tulajdonságot? Erre a kérdésre válaszol az alábbi tétel.

1. TÉTEL: PROGRAM KITERJESZTÉSE

Legyen a B állapottér altere az A állapottérnek, és jelölje B' a B kiegészítő alterét A-ra. Legyen továbbá S program a B állapottéren, és S' az S kiterjesztése A-ra. Ekkor S' program.

A tétel bizonyítása rendkívül egyszerű, a feladatok között szerepel.



3.2. ábra. Program kiterjesztése

3.3. Kiterjesztési tételek

Az alábbiakban következő tételcsoport a megoldás feltételeinek teljesülését vizsgálja a kiterjesztett feladatok és programok között.

8. DEFINÍCIÓ: PROGRAMOK EKVIVALENCIÁJA
Legyenek $S_1 \subseteq A_1 \times A_1^{**}$, $S_2 \subseteq A_2 \times A_2^{**}$ programok, B altere mind A_1-nek, mind A_2-nek. Azt mondjuk, hogy S_1 *ekvivalens* S_2-vel B-n,

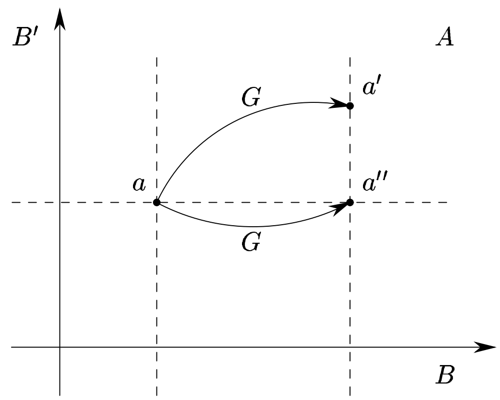
$$pr_B(p(S_1)) = pr_B(p(S_2)).$$

A fenti definíció annak formális leírása, hogy két program ugyanakkor terminál, és ha terminál, akkor ugyanazt az eredményt adja.

A definíciónak egyszerű következménye az is, hogy a két ekvivalens program a közös altéren pontosan ugyanazokat a feladatokat oldja meg.

Valójában attól, hogy két program ekvivalens – azaz megegyezik a programfüggvényük – egyéb tulajdonságaik nagyon eltérők lehetnek. Ilyen – nem elhanyalgolható – különbség lehet például a hatékonyságukban. Egyáltalán nem mindegy, hogy egy program mennyi ideig fut és mekkora memóriára van szüksége. Tehát az, hogy egy program helyes (megold egy feladatot) még korántsem elegendő. A program ezen jellemzőinek vizsgálata azonban meghaladja e könyv célját és kereteit.

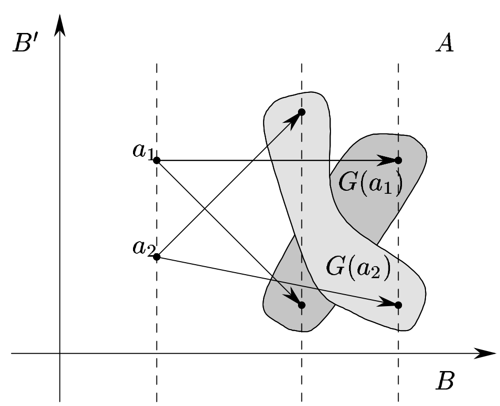
9. DEFINÍCIÓ: BŐVÍTETT IDENTITÁS
Legyen B altere A-nak, B' a B kiegészítő altere A-ra, $G \subseteq A \times A$ feladat. A G *bővített identitás* B' felett, ha $\forall (a, a') \in G : \exists a'' \in A$, hogy $(a, a'') \in G \wedge pr_{B'}(a) = pr_{B'}(a'') \wedge pr_B(a') = pr_B(a'')$.



3.3. ábra. Bővített identitás

Ez a definíció tulajdonképpen azt írja le, hogy a feladat altérre vett projekciójának – mint relációnak – tartalmaznia kell az identikus leképezés megszorítását a projektált feladat értelmezési tartományára. De lássuk a második tulajdonságot!

10. DEFINÍCIÓ: VETÍTÉSTARTÁS
Legyen B altere A-nak, $G \subseteq A \times A$ feladat. A G *vetítéstartó* B felett, ha $\forall a_1, a_2 \in \mathcal{D}_G : (pr_B(a_1) = pr_B(a_2)) \Rightarrow (pr_B(G(a_1)) = pr_B(G(a_2)))$.

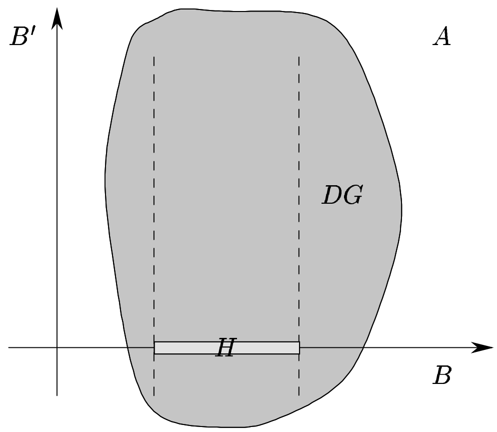


3.4. ábra. Vetítéstartás

A kiterjesztett feladatok és programok illetve az eredeti állapottéren levő feladatok és programok közötti kapcsolatokról szóló tételek kimondásához szükségünk van még egy definícióra:

11. DEFINÍCIÓ: FÉLKITERJESZTÉS

Legyen B altere A-nak, $G \subseteq A \times A$ feladat, $H \subseteq B$. Azt mondjuk, hogy a G *félkiterjesztés* H felett, ha $pr_B^{-1}(H) \subseteq \mathcal{D}_G$.



3.5. ábra. Félkiterjesztés

Az imént bevezetett definíciók segítségével kimondhatók azok az állítások, amelyek a kiterjesztések és a projekció valamint a megoldás közötti kapcsolatot vizsgáló tételcsoportot alkotják.

2. TÉTEL: KITERJESZTÉSI TÉTELEK

Legyen B altere A-nak, B' a B kiegészítő altere A-ra, S program B-n, $F \subseteq B \times B$ feladat, S' illetve F' S-nek illetve F-nek a kiterjesztése A-ra. Legyen továbbá $\overline{F} \subseteq A \times A$ olyan feladat, melyre $pr_B(\overline{F}) = F$, és $\overline{S} \subseteq A \times A^{**}$ pedig olyan program, amely ekvivalens S-sel B-n. Ekkor az alábbi állítások teljesülnek:

(1) ha S' megoldása F'-nek, akkor S megoldása F-nek,

(2) ha S' megoldása $\overline{F}$-nek, akkor S megoldása F-nek,

(3) ha $\overline{S}$ megoldása F'-nek, akkor S megoldása F-nek,

(4) ha $\overline{S}$ megoldása $\overline{F}$-nek és $p(\overline{S})$ vetítéstartó B felett, vagy $\overline{F}$ félkiterjesztés $\mathcal{D}_F$ felett, akkor S megoldása F-nek,

(5) ha S megoldása F-nek, akkor S' megoldása F'-nek,

(6) ha S megoldása F-nek és $\overline{F}$ bővített identitás B' felett és vetítéstartó B felett, akkor S' megoldása $\overline{F}$-nek,

(7) ha S megoldása F-nek és $p(\overline{S})$ félkiterjesztés $\mathcal{D}_F$ felett, akkor $\overline{S}$ megoldása F'-nek.

Bizonyítás: Mielőtt sorra bizonyítanánk az egyes tételeket, vegyük észre, hogy a (4) tételből következik az első három, hiszen S' ekvivalens S-sel B-n és $p(S')$ vetítéstartó, illetve $pr_B(F') = F$ és F' félkiterjesztés $\mathcal{D}_F$-en. Hasonló meggondolások alapján a (6) tételből is következik az (5) tétel, hiszen F' bővített identitás B' felett és vetítéstartó B felett. Elegendő tehát a (4), (6), és (7) tételeket bizonyítani.

Tekintsük először a (4) tétel bizonyítását: Legyen $b \in \mathcal{D}_F$ tetszőleges. Ekkor

$$\begin{aligned} b \in \mathcal{D}_F \quad & \Rightarrow \quad \exists a \in \mathcal{D}_{\overline{F}} : pr_B(a) = b \\ & \overset{\text{megoldás}}{\Rightarrow} \quad a \in \mathcal{D}_{p(\overline{S})} \\ & \overset{\overline{S}\text{ekv.}S}{\Rightarrow} \quad pr_B(a) \in \mathcal{D}_{p(S)} \end{aligned}$$

tehát $\mathcal{D}_F \subseteq \mathcal{D}_{p(S)}$, s így a megoldás első kritériumának teljesülését bebizonyítottuk. Tekintsük most a második kritériumot: legyen $b \in \mathcal{D}_F$ tetszőlegesen rögzített. Ekkor

$$\begin{aligned} p(S)(b) &= \bigcup_{pr_B(a)=b} pr_B(p(\overline{S})(a)) \\ F(b) &= \bigcup_{pr_B(a)=b} pr_B(\overline{F}(a)) \end{aligned}$$

Ha $p(\overline{S})$ vetítéstartó, akkor legyen $a \in \mathcal{D}_{\overline{F}}$ olyan tetszőlegesen rögzített elem, melyre $pr_B(a) = b$. Ekkor

$$p(S)(b) = pr_B(p(\overline{S})(a)) \subseteq pr_B(\overline{F}(a)) \subseteq F(b)$$

Ha $\overline{F}$ félkiterjesztés, akkor $pr_B^{-1}(b) \subseteq \mathcal{D}_{\overline{F}}$, azaz

$$\forall a \in A : pr_B(a) = b \Rightarrow a \in \mathcal{D}_{\overline{F}}$$

és így a megoldás definíciója miatt

$$\forall a \in A : pr_B(a) = b \Rightarrow p(\overline{S})(a) \subseteq \overline{F}(a)$$

tehát

$$\begin{aligned} & \bigcup_{pr_B(a)=b} p(\overline{S})(a) \subseteq \bigcup_{pr_B(a)=b} \overline{F}(a) \\ \Rightarrow \quad & pr_B\Big(\bigcup_{pr_B(a)=b} p(\overline{S})(a)\Big) \subseteq pr_B\Big(\bigcup_{pr_B(a)=b} \overline{F}(a)\Big) \\ \Rightarrow \quad & \bigcup_{pr_B(a)=b} pr_B(p(\overline{S})(a)) \subseteq \bigcup_{pr_B(a)=b} pr_B(\overline{F}(a)) \\ \Rightarrow \quad & p(S)(b) \subseteq F(b) \end{aligned}$$

és ezzel beláttuk, hogy az S program megoldja az F feladatot.
Nézzük most a (6) tétel bizonyítását.

1. $\mathcal{D}_{\overline{F}} \subseteq \mathcal{D}_{p(S')}$, ui.

   Legyen $a \in \mathcal{D}_{\overline{F}}$. Ekkor $pr_B(a) \in \mathcal{D}_F$. Felhasználva, hogy S megoldása F-nek, $pr_B(a) \in \mathcal{D}_{p(S)}$. A program kiterjesztésének definíciójából következik, hogy ekkor $a \in \mathcal{D}_{p(S')}$.

2. $\forall a \in \mathcal{D}_{\overline{F}} : p(S')(a) \subseteq \overline{F}(a)$, ui.

   Legyen $a \in \mathcal{D}_{\overline{F}}$ tetszőlegesen rögzített, $a' \in p(S')(a)$. Ekkor – felhasználva, hogy S' az S kiterjesztése – a'-re fennáll az alábbi tulajdonság:

$$pr_{B'}(a') = pr_{B'}(a)$$

   Legyen $b' = pr_B(a')$. Ekkor $b' \in p(S)(pr_B(a))$. Mivel S megodja F-et, adódik, hogy $b' \in F(pr_B(a))$. Ekkor – mivel $\overline{F}$ vetítéstartó B felett és F a $\overline{F}$ projekciója – adódik, hogy $\exists a'' \in \overline{F}(a) : pr_B(a'') = b'$. Felhasználva, hogy $\overline{F}$ bővített identitás B' felett, $\exists a''' \in \overline{F}(a)$, amelyre

$$pr_{B'}(a''') = pr_{B'}(a) \;\text{ és }\; pr_B(a''') = b'.$$

   Ekkor viszont $a' = a'''$, azaz $a' \in \overline{F}(a)$.

Most már csak a (7) állítás bizonyítása van hátra:

(1) Legyen $a \in \mathcal{D}_{F'}$. Ekkor a feladat kiterjesztése definíciója alapján $pr_B(a) \in \mathcal{D}_F$. Mivel $p(\overline{S})$ félkiterjesztés $\mathcal{D}_F$ felett, $a \in \mathcal{D}_{p(\overline{S})}$.

(2) Legyen $a \in \mathcal{D}_{F'}$ tetszőlegesen rögzített. Ekkor

$$\begin{aligned} pr_B(a) \in \mathcal{D}_F \quad &\overset{\text{megoldás}}{\Rightarrow} \quad p(S)(pr_B(a)) \subseteq F(pr_B(a)) \\ &\overset{\overline{S}\text{ ekv. } S}{\Rightarrow} \quad pr_B\Big(\bigcup_{pr_B(x)=pr_B(a)} p(\overline{S})(x)\Big) \subseteq F(pr_B(a)) \end{aligned}$$

   innét a feladat kiterjesztésének definíciója alapján a $pr_B^{(-1)}$ relációt alkalmazva:

$$p(\overline{S})(a) \subseteq \bigcup_{pr_B(x)=pr_B(a)} p(\overline{S})(x) \subseteq F'(a).$$

Ezzel a (7) állítást is bebizonyítottuk. ☐

A gyakorlatban használt kiterjesztéseknek, azaz az állapotér gyakorlatban előforduló bővítéseinek ezek a tételek adják meg az elméleti hátterét. Ezen tételek fennállása garantálja például, hogy az új változó bevezetése nem rontja el a megoldást.

12. DEFINÍCIÓ: A MEGOLDÁS ÁLTALÁNOSÍTÁSA

Legyen $F \subseteq A \times A$ feladat és $S \subseteq B \times B^{**}$ program. Azt mondjuk, hogy a S megoldása F-nek, ha létezik C állapottér, aminek A és B is altere és S kiterjesztése C-re F C-re való kiterjesztésének megoldása.

A kiterjesztési tételekből következik, hogy a definícióban a *létezik* helyett *minden* is írható.

3.4. Példák

1. példa: $A = \{1, 2, 3\}, B = A \times \{1, 2, 3\}$. $F \subseteq A \times A$. $F = \{(1, 2), (1, 3)\}$. Mi az F kiterjesztettje B-re?

Megoldás: A feladat kiterjesztésének definíciója alapján:

$$\begin{array}{llllll}
F = \{ & ((1,1),(2,1)), & ((1,1),(2,2)), & ((1,1),(2,3)), & ((1,2),(2,1)), \\
& ((1,2),(2,2)), & ((1,2),(2,3)), & ((1,3),(2,1)), & ((1,3),(2,2)), \\
& ((1,3),(2,3)), & ((1,1),(3,1)), & ((1,1),(3,2)), & ((1,1),(3,3)), \\
& ((1,2),(3,1)), & ((1,2),(3,2)), & ((1,2),(3,3)), & ((1,3),(3,1)), \\
& ((1,3),(3,2)), & ((1,3),(3,3)) & \}
\end{array}$$

2. példa: Adott az $\mathbb{L} \times \mathbb{L}$ állapottéren az $F = \{((l,k),(l',k')) \mid k' = (l \wedge k)\}$ feladat, és az $A' = \mathbb{L} \times \mathbb{L} \times V$ állapottéren ($V = \{1,2\}$) a következő program:

$$\begin{array}{llll}
S = \{ & (ii1, \langle ii1, ih2, hi2 \rangle), & (ii2, \langle ii2, hh1, ii1 \rangle), & \\
& (ii2, \langle ii2, ih2, hi1, hi2 \rangle), & (ih1, \langle ih1 \rangle), & \\
& (ih2, \langle ih2, ii1, hh1 \rangle), & (hi1, \langle hi1, hh2 \rangle), & \\
& (hi2, \langle hi2, hi1, ih1 \rangle), & (hi2, \langle hi2, hh1, hh2 \rangle), & \\
& (hh1, \langle hh1, ih1 \rangle), & (hh2, \langle hh2 \rangle) & \}
\end{array}$$

Megoldja-e S az F A'-re való kiterjesztettjét?
Megoldás: ŕjuk fel az F A'-re való kiterjesztettjét:

$$\begin{array}{llllll}
F' = \{ & (ii1, ii1), & (ii1, hi1), & (ii1, ii2), & (ii1, hi2), & \\
& (ii2, ii1), & (ii2, hi1), & (ii2, ii2), & (ii2, hi2), & \\
& (ih1, ih1), & (ih1, hh1), & (ih1, ih2), & (ih1, hh2), & \\
& (ih2, ih1), & (ih2, hh1), & (ih2, ih2), & (ih2, hh2), & \\
& (hi1, ih1), & (hi1, hh1), & (hi1, ih2), & (hi1, hh2), & \\
& (hi2, ih1), & (hi2, hh1), & (hi2, ih2), & (hi2, hh2), & \\
& (hh1, ih1), & (hh1, hh1), & (hh1, ih2), & (hh1, hh2), & \\
& (hh2, ih1), & (hh2, hh1), & (hh2, ih2), & (hh2, hh2) & \}
\end{array}$$

Az S program programfüggvénye:

$$\begin{array}{llllll}
p(S) = \{ & (ii1, hi2), & (ii2, ii1), & (ii2, hi2), & (ih1, ih1), \\
& (ih2, hh1), & (hi1, hh2), & (hi2, ih1), & (hi2, hh2), \\
& (hh1, ih1), & (hh2, hh2) & \}
\end{array}$$

A megoldás definíciója két pontjának teljesülését kell belátnunk. $\mathcal{D}_{F'} \subseteq= \mathcal{D}_{p(S)}$ triviálisan teljesül, hiszen mindkét halmaz a teljes állapottér. Vizsgáljuk meg most, hogy $\forall a \in \mathcal{D}_F : p(S)(a) \subseteq F'(a)$ teljesül-e!

$$\begin{aligned}
p(S)(ii1) = \{hi2\} &\subseteq \{ii1, hi1, ii2, hi2\} = F(ii1) \\
p(S)(ii2) = \{ii1, hi2\} &\subseteq \{ii1, hi1, ii2, hi2\} = F(ii2) \\
p(S)(ih1) = \{ih1\} &\subseteq \{ih1, hh1, ih2, hh2\} = F(ih1) \\
p(S)(ih2) = \{hh1\} &\subseteq \{ih1, hh1, ih2, hh2\} = F(ih2) \\
p(S)(hi1) = \{hh2\} &\subseteq \{ih1, hh1, ih2, hh2\} = F(hi1) \\
p(S)(hi2) = \{ih1, hh2\} &\subseteq \{ih1, hh1, ih2, hh2\} = F(hi2) \\
p(S)(hh1) = \{ih1\} &\subseteq \{ih1, hh1, ih2, hh2\} = F(hh1) \\
p(S)(hh2) = \{hh2\} &\subseteq \{ih1, hh1, ih2, hh2\} = F(hh2)
\end{aligned}$$

Tehát az S program megoldja az F feladat kiterjesztettjét.

3. példa: Igaz-e, ha $S \subseteq B \times B$, A altere B-nek, akkor

$$\mathcal{D}_{pr_A(p(S))} = pr_A(\mathcal{D}_{p(S)})?$$

Megoldás: Próbáljuk meg az állítást kétirányú tartalmazkodás belátásával bizonyítani.
$\mathcal{D}_{pr_A(p(S))} \subseteq pr_A(\mathcal{D}_{p(S)})$: Legyen $a \in \mathcal{D}_{pr_A(p(S))}$. Ekkor

$$\begin{aligned} & \exists a' \in A : (a, a') \in pr_A(p(S)) \\ \Rightarrow \quad & \exists (b, b') \in p(S) : pr_A(b, b') = (a, a') \\ \Rightarrow \quad & b \in \mathcal{D}_{p(S)} \Rightarrow pr_A(b) = a \in pr_A(\mathcal{D}p(S)). \end{aligned}$$

$pr_A(\mathcal{D}_{p(S)}) \subseteq \mathcal{D}_{pr_A(p(S))}$: Legyen $a \in pr_A(\mathcal{D}_{p(S)})$. Ekkor

$$\begin{aligned} & \exists b \in \mathcal{D}_{p(S)} : pr_A(b) = a \\ \Rightarrow \quad & \exists b' \in B : (b, b') \in p(S) \\ \Rightarrow \quad & (a, pr_A(b')) \in pr_A(p(S)) \\ \Rightarrow \quad & a \in \mathcal{D}_{pr_A(p(S))} \end{aligned}$$

és ezzel az állítást bebizonyítottuk.

3.5. Feladatok

1. $A = \mathbb{N}, B = A \times \mathbb{N}$. $F \subseteq A \times A$. $F = \{(q, r) \mid r = q + 1\}$. Mi az F kiterjesztettje B-re?

2. Igaz-e, ha $S \subseteq B \times B^{**}$ program, A altere B-nek, akkor S $A \times A$-ra történő projekciójának kiterjesztése $B \times B$-re azonos S-sel?

3. Bizonyítsuk be, hogy egy program kiterjesztettje valóban program!

4. $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$. Mondjunk példát olyan programra, amelynek egyetlen valódi altérre vett projekciója sem program. $(A_k = \mathbb{N}, k = 1, \ldots, n)$.

5. Legyen A altere B-nek, $F \subseteq A \times A$, $F'' \subseteq B \times B$, F' az F kiterjesztettje B-re. Igaz-e, hogy

   a) ha $F = pr_A(F'')$, akkor F'' az F kiterjesztettje?

   b) $F' = pr_A^{(-1)}(F)$? ill. $F' = pr_A^{-1}(F)$?

6. Legyen $F \subseteq A \times A$, $F' \subseteq B \times B$, $F'' \subseteq C \times C$, $F''' \subseteq D \times D$, ahol $B = A \times A_1$, $C = A \times A_2$, $D = A \times A_1 \times A_2$, és legyen F', F'', F''' az F kiterjesztése rendre B-re, C-re, D-re. Igaz-e, hogy F''' az F'' kiterjesztése D-re? Add meg az F' és az F'' közötti kapcsolatot a projekció és a kiterjesztés fogalmának segítségével!

7. B és C altere A-nak. $F \subseteq A \times A, F_1 \subseteq B \times B, F_2 \subseteq C \times C$. F_1 az F projekciója B-re. F az F_2 kiterjesztése A-ra. Igaz-e, hogy az F_1 feladat A-ra való kiterjesztettjének C-re vett projekciója megegyezik F_2-vel?