6.

Elemi programok

Ebben a fejezetben bevezetünk néhány egyszerű programot. Ezeket a programokat a következő fejezetekben gyakorta fogjuk használni, ezért megvizsgáljuk a programfüggvényüket, és egy adott utófeltételhez tartozó leggyengébb előfeltételüket.

19. DEFINÍCIÓ: ELEMI PROGRAM

Eleminek nevezünk egy A állapottéren egy S programot, ha

$$\forall a \in A: \; S(a) \subseteq \{<a>, <a, a, a, \cdots>, <a, b> \; | \; b \neq a\}.$$

Az elemi programok közül is kiválasztunk néhány speciális tulajdonsággal rendelkezőt, és a továbbiakban csak velük foglalkozunk.

Az első ilyen program, az üres program lesz, ami nem csinál semmit.

20. DEFINÍCIÓ: SKIP

SKIP-nek nevezzük azt a programot, amire

$$\forall a \in A: \; SKIP(a) = \{<a>\}.$$

A második program a törlődés, aminek legfontosabb jellemzője, hogy soha sem terminál.

21. DEFINÍCIÓ: ABORT

ABORT-tal jelöljük azt a programot, amire

$$\forall a \in A: \; ABORT(a) = \{<a, a, a, \cdots>\}.$$

Az eddig felsorolt két elemi program segítségével még bajosan tudnánk egy adott feladatot megoldó programot készíteni, hiszen egyrészt nem túl sok olyan feladat van, aminek az $ABORT$ program megoldása lenne (vajon van ilyen egyáltalán?) és a $SKIP$ program is csak egy nagyon szűk feladatosztálynak lehet megoldása (melyek ezek a feladatok?). A harmadik – és a programozási feladat megoldása szempontjából legfontosabb – speciális elemi program az értékadás.

22. DEFINÍCIÓ: ÉRTÉKADÁS

Legyen $A = A_1 \times \cdots \times A_n$, $F = (F_1, \ldots, F_n)$, ahol $F_i \subseteq A \times A_i$. Az S program *általános értékadás*, ha

$$\begin{aligned} S &= \{(a, red(< a, b >)) \mid a, b \in A \wedge a \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{D}_{F_i} \wedge b \in F(a)\} \cup \\ &\quad \{(a, < a, a, a, \cdots >) \mid a \in A \wedge a \notin \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{D}_{F_i}\} \end{aligned}$$

A definíció alapján könnyen látható, hogy az $F \subseteq A \times A$ relációra fennáll az alábbi tulajdonság:

- $\mathcal{D}_F = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathcal{D}_{F_i}$,
- $F(a) = F_1(a) \times F_2(a) \times \cdots \times F_n(a)$

A fenti F_i komponensrelációk tehát pontosan azt írják le, hogy az adott értékadás miként változtatja meg az állapottér egyes komponenseit.

23. DEFINÍCIÓ: AZ ÁLTALÁNOS ÉRTÉKADÁS SPECIÁLIS ESETEI

- Ha $\mathcal{D}_F = A$, akkor az S programot *értékkiválasztás*nak nevezzük, és $a :\in F(a)$-val jelöljük.
- Ha az F reláció függvény. akkor az S programot *értékadás*nak nevezzük, és $a := F(a)$-val jelöljük.
- Ha $\mathcal{D}_F \subset A$, akkor S *parciális értékkiválasztás*.
- Ha $\mathcal{D}_F \subset A$ és F determinisztikus (F parciális függvény), akkor S *parciális értékadás*.

Ha egy kivételével az összes F_i projekció – azaz az értékadás az állapottérnek csak egy komponensét (csak egy változó értékét) változtatja meg –, akkor S-et *egyszerű* értékadásnak, egyébként *szimultán* értékadásnak nevezzük.

Az értékadás egy kicsit bonyolultabb mint előző két társa, de egy kicsit "értékesebb" is, hiszen értékadással minden feladat megoldható! A kérdés persze csupán az, hogy az éppen adott feladat által definiált értékadás megengedett művelet-e. Ezzel a kérdéssel a későbbiekben – a programozási feladat megoldása során – fogunk foglalkozni.

Vizsgáljuk meg a fent definiált speciális elemi programok programfüggvényeit!

6. TÉTEL: ELEMI PROGRAMOK PROGRAMFÜGGVÉNYE

1. $p(SKIP) = id_A$,
2. $p(ABORT) = \emptyset$,
3. $p(a := F(a)) = F$,
4. $p(a :\in F(a)) = F$.

A tételt bizonyítása triviális, ezért itt nem bizonyítjuk (a feladatok között szerepel).

Most, hogy megvizsgáltuk a programfüggvényeket, nézzük meg az elemi programok adott utófeltételhez tartozó leggyengébb előfeltételét.

Mivel a SKIP program programfüggvénye az identikus leképezés, egy tetszőleges R utófeltételhez tartozó leggyengébb előfeltétele:

$$lf(SKIP, R) = R.$$

Hasonlóan egyszerűen látható, hogy – mivel az $ABORT$ program programfüggvénye üres – a leggyengébb előfeltétel definíciója alapján egy teszőleges R utófeltétel esetén

$$lf(ABORT, R) = hamis.$$

Az általános értékadás leggyengébb előfeltételét külön vizsgáljuk a determinisztikus és nem determinisztikus, illetve a globális, és a parciális esetben.

Legyen $F : A \to A$ függvény. Ekkor

$$\begin{aligned} \lceil lf(a := F(a), R) \rceil &= \{a \in A \mid F(a) \in \lceil R \rceil\} = \\ &= F^{(-1)}(\lceil R \rceil) = F^{-1}(\lceil R \rceil) = \lceil R \circ F \rceil. \end{aligned}$$

Ha F parciális függvény, akkor az általa definiált értékadás is parciális, melynek leggyengébb előfeltétele:

$$\begin{aligned} \lceil lf(a := F(a), R) \rceil &= \{a \in A \mid F(a) \in \lceil R \rceil\} \cap \mathcal{D}_F = \\ &= F^{(-1)}(\lceil R \rceil) \cap \mathcal{D}_F = F^{-1}(\lceil R \rceil) \cap \mathcal{D}_F. \end{aligned}$$

Most vizsgáljuk azt a két esetet, amikor F nem determinisztikus. Feltéve, hogy $\mathcal{D}_F = A$, az értékkiválasztás leggyengébb előfeltétele

$$\lceil lf(a :\in F(a), R) \rceil = \{a \in A \mid F(a) \subseteq \lceil R \rceil\} = F^{-1}(\lceil R \rceil).$$

Ugyanez parciális esetben:

$$\lceil lf(a :\in F(a), R) \rceil = \{a \in A \mid F(a) \subseteq \lceil R \rceil\} \cap \mathcal{D}_F = F^{-1}(\lceil R \rceil) \cap \mathcal{D}_F.$$

Az értékadást általában változókkal írjuk le. Legyenek az állapottér változói rendre $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ekkor az $a := F(a)$ program jelölésére az alábbi formulát használhatjuk.

$$x_1, x_2, \ldots, x_n := F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

A gyakorlatban az esetek többségében F komponenseinek nagy része projekció, azaz $F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i$. Ekkor az értékadás jelöléséből a bal oldalról x_i-t , a jobb oldalról pedig $F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$-t elhagyjuk. Vegyük észre, hogy egyszerű értékadás esetén a bal oldalon csak egy változó, a jobb oldalon pedig csak egy kifejezés marad.

Jelölésünket abban az esetben még tovább egyszerűsíthetjük, ha az értékadás jobb oldala (F_i) nem függ minden változótól. Ekkor a jobb oldalon csak azokat a változókat tüntetjük fel, amelyektől F_i függ.

Nézzük meg egy egyszerű példán a fent leírtakat: Legyen az állapottér

$$\begin{array}{ccccc} A & = & \mathbb{Z} & \times & \mathbb{L} \\ & & x & & l \end{array}$$

A továbbiakban a fentihez hasonlóan az állapottér egyes komponenseihez tartozó változókat a komponensek alá fogjuk írni. Legyenek az értékadás komponensei: $\forall a = (a_1, a_2) \in A$:

$$\begin{aligned} F_1(a_1, a_2) &= a_1, \text{ azaz } F_1 = pr_{\mathbb{Z}}, \text{ és} \\ F_2(a_1, a_2) &= (a_1 > 0). \end{aligned}$$

Ekkor az $a := F(a)$ értékadás változókkal felírva:

$$x, l := x, (x > 0).$$

A jelölés fent leírt egyszerűsítéseit elvégezve az

$$l := (x > 0)$$

egyszerű értékadást kapjuk.

Ha felhasználjuk, hogy az értékadás leggyengébb előfeltétele $R \circ F$, akkor egy változókkal felírt értékadás változókkal megadott előfeltételét egyszerűen kiszámíthatjuk: helyettesítsük az utófeltételben az értékadásban szereplő változókat az új értékükkel. Erre bevezetünk egy új jelölést is: legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rendre az állapottér változói. Ekkor

$$lf(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m} := F_{i_1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_{i_m}(x_1, \ldots, x_n), R) = R^{x_{i_1} \leftarrow F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, x_{i_m} \leftarrow F_m(x_1, \ldots, x_n)}$$

6.1. Feladatok

1. $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b\}, C = A \times B$. Legyen S program A-n, $S = \{1 \to \langle 1 \rangle, 2 \to \langle 2222 \ldots \rangle, 3 \to \langle 31 \rangle\}$.

   Legyen S_1 az S kiterjesztése C-re, M pedig olyan program C-n, hogy M ekvivalens S-sel A-n.

(a) elemi program-e S?

(b) elemi program-e S_1 és biztosan elemi program-e M?

2. Tekintsük az alábbi állapotteret:

$$A = \underset{x}{\mathbb{N}} \times \underset{y}{\mathbb{N}}$$

Mi az $(x, y) := F(x, y),\ F = (F_1, F_2),\ F_1(x, y) = y,\ F_2(x, y) = x$, azaz az $F(p, q) = \{b \in A \mid x(b) = q \wedge y(b) = p\}$ értékadás $R = (x < y)$ utófeltételhez tartozó leggyengébb előfeltétele?

3. Legyen A tetszőleges állapottér. Melyek azok a feladatok az A-n, amelyeknek megoldása a $SKIP$ program?

4. Legyen A tetszőleges állapottér. Melyek azok a feladatok az A-n, amelyeknek megoldása a $ABORT$ program?